

三维 Helmholtz 方程的边界点方法^①

祁 慧 芳

重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331

摘要: 将移动最小二乘近似和边界积分方程相结合, 提出了求解三维 Helmholtz 方程内外边值问题的无网格边界点方法. 该方法用单层位势理论将 Helmholtz 方程转化为间接边界积分方程, 并用边界点法离散间接边界积分方程. 由于边界积分方程中含有基本解的积分计算时会出现弱奇异, 详细推导了弱奇异积分的计算方式. 数值算例表明了间接边界点法求解三维 Helmholtz 方程的有效性.

关 键 词: 无网格方法; Helmholtz 方程; 边界点方法; 移动最小二乘近似; 间接边界积分方程

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)05-0011-06

很多数学物理问题, 如波的传播、辐射和振动等问题的计算都可归结为求解大型偏微分方程, 这常常需要求解 Helmholtz 方程. 到目前为止, 求解 Helmholtz 方程边值问题的数值方法有很多, 如有限差分法^[1] (FDM)、有限元法^[2] (FEM)、边界元法^[3-4] (BEM)等一些传统的数值方法. 无网格方法在近几年得到了很大的发展, 较传统数值方法, 无网格法的优点是不用和节点关联的网格就能把网格消除, 这样不仅摆脱了传统方法对网格的束缚, 而且具有一定的灵活性. 移动最小二乘法(moving least-square)是形成无网格法逼近函数的一种, 在无网格法中应用广泛. Mukherjee 等人将移动最小二乘法与边界积分方程相结合, 提出了边界点方法^[5-6] (boundary node method, BNM), 这是一类边界型无网格方法. 该方法相较于传统数值方法不仅计算量小, 而且计算精度较高. 其中, 杂交边界点法^[7]解决了二维 Helmholtz 方程内边值问题. 本文尝试用边界点法求解三维 Helmholtz 内外边值问题. 数值算例表明, 该方法对解内外边值问题有较高的精度和较快的收敛速度.

1 Helmholtz 方程及边界积分方程

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界域, Ω' 是有界区域 Ω 的补域, Γ 是 Ω 的边界. 考虑如下三维 Helmholtz 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega' \\ u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \left(|\mathbf{x}| \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right| \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: Δ 为 Laplace 算子, k 为常数, u 为位势函数, u_0 是边界上的已知量. 由单层位势理论^[8] 可得以下积分方程

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{s}_x \quad \mathbf{y} \in \Omega \cup \Omega' \quad (2)$$

其中 $u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ 为三维 Helmholtz 方程的基本解.

① 收稿日期: 2017-01-23

作者简介: 祁慧芳(1990-), 女, 山西大同人, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程数值解法研究.

由(1)式可以进一步得到

$$u_0(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{s}_x \quad \mathbf{y} \in \Omega \cup \Omega' \quad (3)$$

2 移动最小二乘近似(MLS)形函数

令 σ 在边界 Γ 上的移动最小二乘近似为

$$\sigma(s) = \sum_{i=1}^m p_i(s) a_i(s) = \mathbf{P}^T(s) \mathbf{a}(s) \quad (4)$$

其中: s 是边界 Γ 上的曲面坐标, $\mathbf{P}(s)$ 是基向量, m 是基向量的个数, $\mathbf{a}(s)$ 是系数向量. 对任一点 s , $\mathbf{a}(s)$ 的选择总是使得下列离散 L^2 模取极小值:

$$J = \sum_{i=1}^N w_i(s - s_i) [\mathbf{P}^T(s_i) \mathbf{a}(s) - \sigma_i]^2$$

其中: σ_i 是节点密度函数值 $\sigma(s_i)$ 的近似; $\{s_i\}_{i=1}^N$ 是 s 周围任意选取的 N 个节点; $w_i(s - s_i)$ 是与节点 i 相关的权函数, 且 $w_i(s) = w_i(s - s_i)$. 当 J 取极小值, 即 $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}(s)} = 0$, 得

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{B}(s) \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}(s)$ 和 $\mathbf{B}(s)$ 分别为

$$\mathbf{A}(s) = \sum_{i=1}^N w_i(s) \mathbf{p}(s_i) \mathbf{p}^T(s_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\mathbf{B}(s) = [w_1(s) \mathbf{p}(s_1), w_2(s) \mathbf{p}(s_2), \dots, w_N(s) \mathbf{p}(s_N)] \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]^T$$

把(5)式代入(4)式可得,

$$\sigma(s) = \mathbf{P}^T(s) \mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{B}(s) \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N \Phi_i(s) \sigma_i \quad (6)$$

其中 $\Phi_i(s)$ 为 MLS 形函数

$$\Phi_i(s) = \sum_{j=1}^m p_j(s) [\mathbf{A}^{-1}(s) \mathbf{B}(s)]_{ji} \quad (7)$$

3 离散间接边界积分方程

把(6)式代入(3)式得

$$u_0(\mathbf{y}_i) = \sum_{j=1}^N \sigma_j \int_{\Gamma} \Phi_j(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\mathbf{s}_x \quad \mathbf{y}_i \in \Gamma \quad (8)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, N$, N 为节点的个数.

(8)式可简写为矩阵形式

$$\mathbf{V} \mathbf{X} = \mathbf{U} \quad (9)$$

其中

$$V_{ij} = \int_{\Gamma} \Phi_j(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) d\mathbf{s}_x \quad (10)$$

$$\mathbf{X} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N]^T \quad (11)$$

$$\mathbf{U} = [u_0(\mathbf{y}_1), u_0(\mathbf{y}_2), \dots, u_0(\mathbf{y}_N)]^T \quad (12)$$

方程(10)中 $i, j = 1, 2, \dots, N$, (11)式中包含 N 个方程和 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ 这 N 个未知量, 通过求解方程组可得到未知量, 再把得到的未知量代入到(2)式的离散形式

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sum_{j=1}^N \Phi_j(\mathbf{x}) \sigma_j d\mathbf{s}_x \quad \mathbf{y} \in \Omega \cup \Omega' \quad (13)$$

这样就可以求出区域内任一点的位势值 u .

方程(10)和(13)要进行数值积分, 这就要对背景网格^[10]进行剖分. 方程(10)当 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 无限接近时基本解的积分会出现弱奇异, 弱奇异的处理^[10]如下: 线性三角形剖分背景网格得到一些在直角坐标系 y_0z 中的

三角形单元, 在第 k 个包含点 y 的三角形单元内(图 1(a)) 计算该奇异积分

$$I = \int_{\Gamma_k} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_{\mathbf{x}} \quad (14)$$

将(图 1(a)) 的三角形单元映入到直角坐标系 sot 中(图 1(b)), 三角形单元被分成了 6 个小三角形, 坐标系变换为 $\begin{cases} y = (1-s-t)y_1 + y_2s + y_3t \\ z = (1-s-t)z_1 + z_2s + z_3t \end{cases}$, 这一过程产生的 Jacobian 为 $J_1 = y_2z_3 - y_2z_1 - y_1z_3 - z_2y_3 + z_1y_3 + y_1z_2$, (14) 式可写为

$$I = \int_{t=0}^{t=1} \int_{s=0}^{s=1-t} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_1 ds dt = \sum_{i=1}^6 I_i \quad (15)$$

其中 $I_i = \int_{\gamma_i} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_1 ds_{\mathbf{x}}$, 再将(图 1(c)) 的一个坐标为 $(s_i, t_i), (s_j, t_j), (s_k, t_k)$ 的小三角形 γ_i 映入到 $\eta_1 - \eta_2$ 空间(图 1(d)), 坐标变换为 $\begin{cases} s = (1-\eta_1-\eta_2)s_i + s_j\eta_1 + s_k\eta_2 \\ t = (1-\eta_1-\eta_2)t_i + \eta_1t_j + \eta_2t_k \end{cases}$, 这一过程的 Jacobian 为 $J_2 = s_jt_k - s_jt_i - s_it_k - s_kt_j + s_kt_i + s_it_j$, 此时

$$I_i = \int_{\eta_2=0}^{\eta_2=1} \int_{\eta_1=0}^{\eta_1=1-\eta_2} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_1 J_2 d\eta_1 d\eta_2 \quad (16)$$

其中: $\eta_1 = r \cos^2 \theta$, $\eta_2 = r \sin^2 \theta$, r 是 x 与 y 之间的距离. 把平面三角形从 $\eta_1 - \eta_2$ 坐标映入到 $r - \theta$ 的矩形空间(图 1(e)), 这一过程的 Jacobian 为 $r \sin 2\theta$, 这时

$$I_i = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=1} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_1 J_2 r \sin 2\theta dr d\theta \quad (17)$$

式中 r 在分子取消了奇异性. 最后再把矩形从 $r - \theta$ 空间映入到标准的正方形 $\xi_1 - \xi_2$ 空间(图 1(f)), 坐标变

换为 $\begin{cases} r = 2\xi_2 - 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4}\xi_1 + \frac{\pi}{4} \end{cases}$, 这一过程的 Jacobian 为 $J_3 = \frac{\pi}{2}$, 这时积分为

$$I_i = \int_{\xi_2=-1}^{\xi_2=1} \int_{\xi_1=-1}^{\xi_1=1} \Phi(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_1 J_2 J_3 r \sin 2\theta d\xi_1 d\xi_2 \quad (18)$$

这样, (18) 式积分则可用常规高斯积分公式来估计.

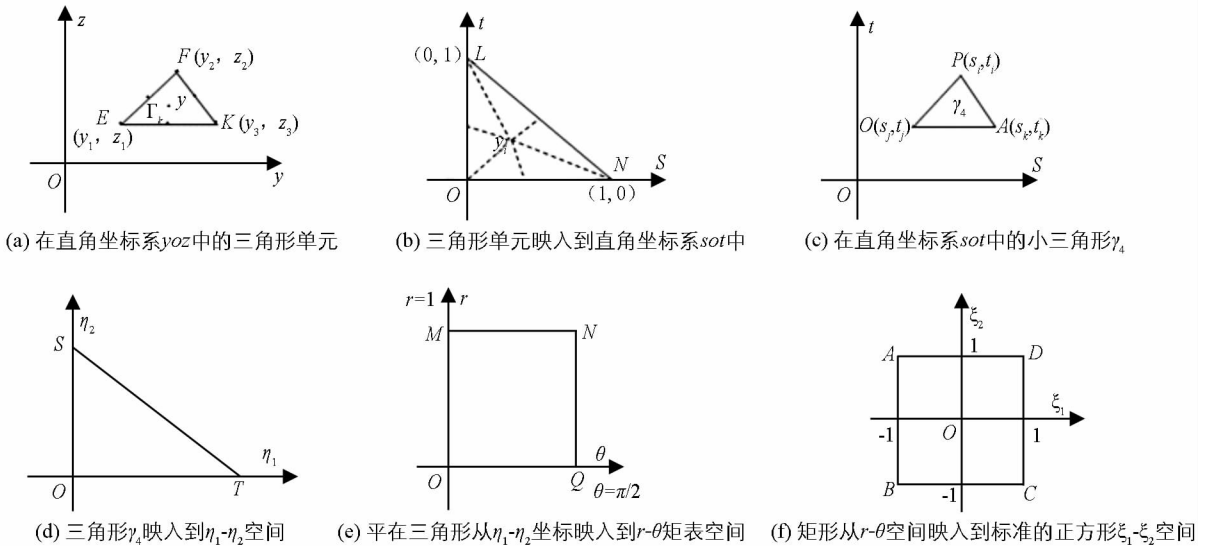


图 1 处理弱奇异积分的示意图

4 数值算例

例 1 在立方体内考虑解析解^[11] 为 $u(\mathbf{x}) = \cos(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$. 考虑参

数 $k = 3$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = \sqrt{k^2 - \xi_1 - \xi_2} = 2$, u 及 u 的偏导的近似解与解析解见图 2.

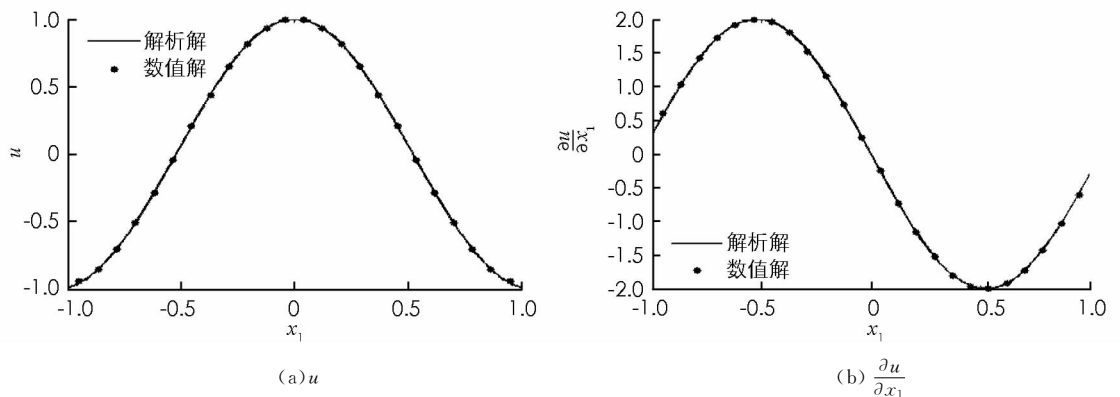


图 2 u 和它的偏导在直线 $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ 上的解析解与数值解的吻合情况

误差的定义和文献[9]中误差的定义一致. u 及 u 的偏导的误差随节点间距的变化见图 3.

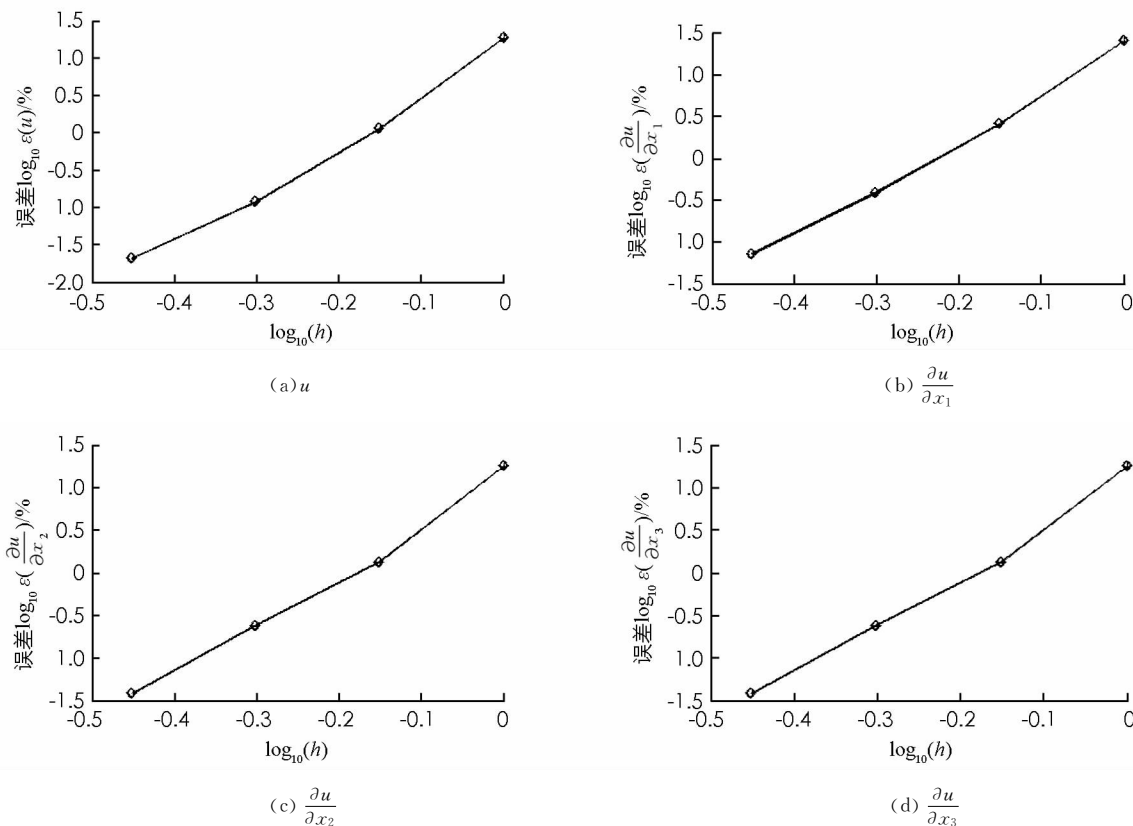


图 3 u 和 u 的偏导的误差

由图 3 可知, 误差随着节点间距的减小而减小.

例 2 在半径为 1, 球心在坐标原点的单位球 Ω 的解析解^[3] 为 $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) x_3 e^{ikr}$, 已知边界条件为 $u(x_1, x_2, x_3)|_{\Gamma} = \left(1 + \frac{i}{k}\right) x_3 e^{ik}$, 求解该 Dirichlet 外边值问题. 选择参数 $k = 1$, 得到了该问题的实部和虚部的解析解和数值解(图 4).

u 及 u 的偏导的误差随节点间距的变化如图 5 所示.

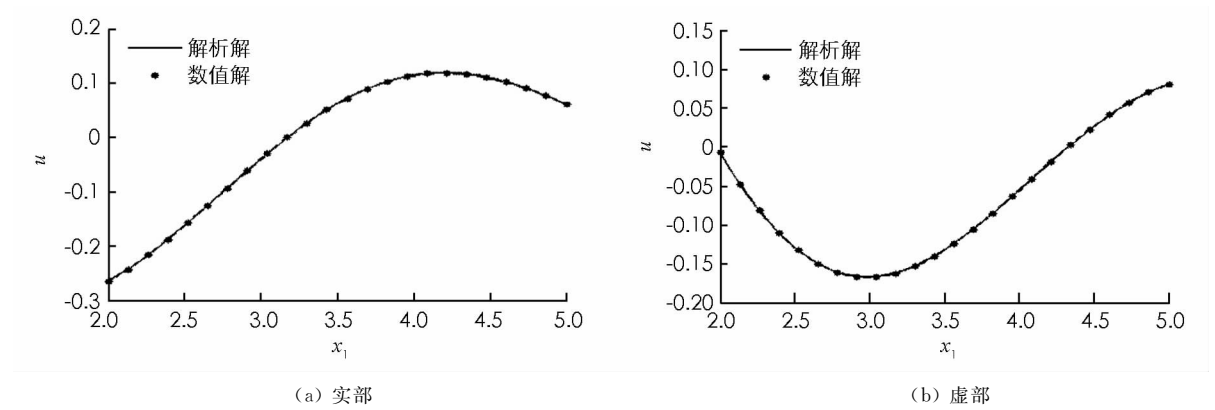


图 4 u 的实部和虚部在直线 $\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$ 上解析解与数值解的吻合情况

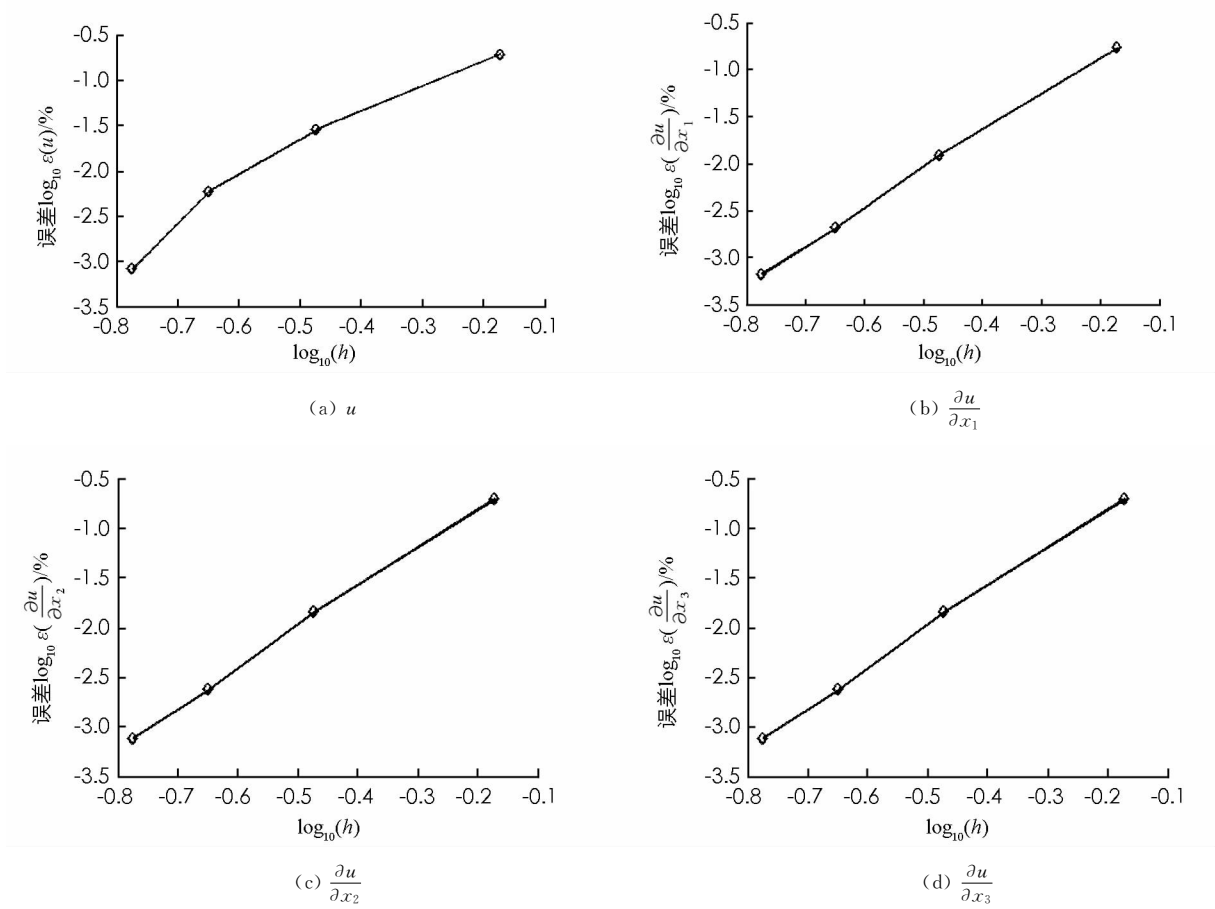


图 5 u 和 u 的偏导的误差

由图 5 可知，随着节点间距的减小， u 及 u 的偏导的误差也在减小。

5 结 论

本文用边界点法求解了三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的内外边值问题，通过位势理论将 Helmholtz 方程转化为间接边界积分方程，基于间接边界积分的 Dirichlet 问题的边界点法的优点有：① 内外问题都可以直接处理；② 计算量较小；③ 未知量和离散代数方程组的个数没增加。两个算例都取得了不错的结果，这说明该方法是可行而有效的。

参考文献:

- [1] 邹静文, 李郴良. 求解三维 Helmholtz 方程的高阶快速数值算法 [J]. 桂林电子科技大学学报, 2013, 33(5): 420—424.
- [2] 张 瑞. Helmholtz 方程有限元方法的精度改进 [J]. 科学技术与工程, 2012, 12(17): 4065—4068.
- [3] 马健军, 祝家麟, 贾丽君. 三维 Helmholtz 方程外边值问题的虚边界元法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2009, 34(6): 14—18.
- [4] 丁方允. 三维 Helmholtz 方程 Dirichlet 问题的边界元法及其收敛性分析 [J]. 兰州大学学报(自科版), 1995, 31(3): 30—38.
- [5] 李兴国, 戴保东, 王灵卉. A Moving Kriging Interpolation-Based Boundary Node Method for Two-Dimensional Potential Problems [J]. 中国物理 B: 英文版, 2010, 19(12): 18—24.
- [6] 王延冲. Signorini 问题的无网格投影迭代法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2014, 39(9): 61—65.
- [7] MIAO Y, WANG Y, WANG Y H. A Meshless Hybrid Boundary-Node Method for Helmholtz Problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2009, 33(2): 120—127.
- [8] 祝家麟, 袁政强. 边界元分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [9] LI Xiao-lin. An Interpolating Boundary Element-Free Method for Three-Dimensional Potential Problems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(10—11): 3116—3134.
- [10] CHATI M K, MUKHERJEE S. The Boundary Node Method for Three-Dimensional Problems in Potential Theory [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 47(9): 1523—1547.
- [11] MARIN L. A Meshless Method for the Numerical Solution of the Cauchy Problem Associated with Three-Dimensional Helmholtz-Type Equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 165(2): 355—374.

On Boundary Node Method for 3-D Helmholtz Equation

QI Hui-fang

College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: Combining the moving least-square (MLS) method and boundary integral equations (BIEs), a meshless method, the boundary node method (BNM), is developed for the internal and external boundary value problems of the 3-D Helmholtz equation. The method converted Helmholtz equation into an indirect boundary integral equation using a single-layer potential theory, and the boundary integral equation is used to separate the indirect boundary integral equation. The integral with the basic solution will appear weakly singular when calculating, therefore, weak singularities need to be treated. Numerical examples showed the effectiveness of the boundary node method for solving indirect boundary integral equation.

Key words: meshless method; Helmholtz equation; boundary node method; moving least-square; indirect boundary integral equations

责任编辑 张 枸