第 43 卷　第 5 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 5 月
Vol. 43　No. 5　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　May. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.05.004

非线性 Sturm-Liouville 边值问题的变号解[①]

纪 宏 伟

南通师范高等专科学校 数理系,江苏 南通 226010

摘要:讨论了 Sturm-Liouville 两点边值问题

$$L\varphi = f\varphi,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$\alpha\varphi(0) - \beta\varphi'(0) = 0,\ \gamma\varphi(1) + \delta\varphi'(1) = 0$$

变号解的存在性,并由此研究了 Hammerstein 型积分方程变号解更一般的情况,得出具有普遍性的结果,改进了之前工作.

关　键　词: Sturm-Liouville 两点边值问题;变号解;Hammerstein 积分方程

中图分类号:O175　　**文献标志码:A**　　**文章编号:**1000-5471(2018)05-0017-06

1　引言及预备知识

Sturm-Liouville(S-L) 算子是常微分算子理论中一类十分重要的微分算子. S-L 问题起源于固体热传导数学模型的描述,自问世以来,S-L 问题在各种理论科学及应用科学领域里有着广泛的应用[1-4]. 近年来,Sturm-Liouville 边值问题引起了很多学者的关注,且有了较丰富的研究成果[5-12]. 但对于变号解存在性的研究相对不多.

本文考虑下面 Sturm-Liouville 两点边值问题

$$L\varphi = f\varphi,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1}$$

$$\alpha\varphi(0) - \beta\varphi'(0) = 0,\ \gamma\varphi(1) + \delta\varphi'(1) = 0 \tag{2}$$

变号解的存在性. 其中 $L\varphi = -(p(x)\varphi'(x))' + q(x)\varphi(x)$,$p(x) \in C^1[0,1]$,$p(x) \geqslant 0$,$q(x) \geqslant 0$,$q(x) \in C[0,1]$.

令 $E = C[0,1]$,则 E 在范数 $\|\varphi\| = \max\limits_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$ 下为 Banach 空间,θ 为 E 中的零元. $P = \{\varphi \mid \varphi \in E,\ \varphi(x) \geqslant 0,\ x \in [0,1]\}$,则 P 为 E 的一个锥. 设 $L\varphi = f\varphi$,其在边值问题(2) 下的特征值不是 0,则(1)(2) 等价于如下非线性积分方程[13]

$$\varphi(x) = \int_0^1 k(x,y) f(\varphi(y))\mathrm{d}y = A\varphi(x)$$

其中

$$k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{w}u(x)v(y),\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{w}u(y)v(x),\ 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

① 收稿日期:2017-03-20
基金项目:江苏省高校青蓝工程基金(2014);江苏省高校教改项目(2015JSJG391).
作者简介:纪宏伟(1977-),男,硕士,副教授,主要从事非线性泛函分析研究.

$u(x)$，$v(x)$ 分别满足

$$Lu = 0,\ u(0) = \beta,\ u'(0) = \alpha$$
$$Lv = 0,\ v(1) = \delta,\ v'(1) = -\gamma$$

w 是一个常数，满足 $\dfrac{p(x)(u(x)v'(x) - v(x)u'(x))}{w} = -1$

定义线性算子 K 如下

$$K\varphi = \int_0^1 k(x,\ y)\varphi(y)dy,\ \varphi \in C[0,\ 1]$$
$$F\varphi = f(\varphi(x)),\ A = KF$$

其中第一特征值 $\lambda_1 = r^{-1}(K)$. 显然，边值问题(1)(2) 在 $C^2[0,\ 1]$ 中有变号解等价于算子方程 $A\varphi(x) = KF\varphi(x) = \varphi(x)$ 在 $C[0,\ 1]$ 中有变号解.

为方便起见，我们列出本文使用的假设.

(H_1) $\alpha \geqslant 0$，$\beta > 0$，$\gamma \geqslant 0$，$\delta > 0$，$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$，$\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

(H_2) $f(u)$：$(-\infty,\ +\infty) \to R^1$ 连续，$f(0) = 0$ 且 $f(u)$ 是关于 u 的严格增函数.

(H_3) $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u} = \tau$，且存在 $n_0 \in N$，使得 $\lambda_{n_0} < \tau < \lambda_{n_0+1}$，其中 λ_1，λ_2，λ_3，… 为 $L\varphi = f\varphi$ 边值问题(2) 下的全系特征值.

本文的主要结果需要用到下述引理

引理 1 假设(H_1) 成立，$k(x,\ y)$ 是由(3) 式定义，则

$$k(x,\ y) \geqslant u^* k(z,\ y),\ \forall x,\ y,\ z \in [0,\ 1] \tag{4}$$

其中 $u^*(x) = \dfrac{u(x)v(x)}{M_2^2}$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，$M_2 = \max\{\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} u(x),\ \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} v(x)\}$.

证 分 4 种情况讨论

(1) $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$，$0 \leqslant z \leqslant y \leqslant 1$，此时有

$$k(x,\ y) = \frac{1}{w}u(x)v(y) \geqslant \frac{u(z)v(x)}{M_2 M_2}\frac{1}{w}u(x)v(y) = \frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\frac{1}{w}u(z)v(y) = u^* k(z,\ y)$$

(2) $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$，此时由文献[14] 引理(iv) 有 $v(y) \geqslant v(z)$

$$k(x,\ y) = \frac{1}{w}u(x)v(y) \geqslant \frac{1}{w}u(x)v(z) \geqslant \frac{u(y)v(x)}{M_2 M_2}\frac{1}{w}u(x)v(z) =$$
$$\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\frac{1}{w}u(y)v(z) = u^* k(y,\ z) = u^* k(z,\ y)$$

(3) $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant z \leqslant y \leqslant 1$，此时由文献[14] 引理(iii) 有 $u(z) \geqslant u(y)$

$$k(x,\ y) = \frac{1}{w}u(x)v(y) \geqslant \frac{1}{w}u(z)v(x) \geqslant \frac{u(x)v(y)}{M_2 M_2}\frac{1}{w}u(z)v(x) =$$
$$\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\frac{1}{w}u(z)v(y) = u^* k(y,\ z) = u^* k(z,\ y)$$

(4) $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$，此时有

$$k(x,\ y) = \frac{1}{w}u(y)v(x) \geqslant \frac{u(z)v(x)}{M_2 M_2}\frac{1}{w}u(y)v(x) = \frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\frac{1}{w}u(y)v(z) = u^* k(z,\ y)$$

引理 2[15] 设 E 为 Banach 空间，P 为 E 中的体锥，$A \in L(E)$ 且是紧的强增算子，若 A 的谱半径 $r(A) < \lambda$，则对于 $y > \theta$，算子方程 $\lambda x - Ax = y$ 有唯一的解 $x \gg \theta$.

此外，以下关于算子方程 $x = Ax$ 变号解存在性的一个抽象结果，对本文讨论至关重要.

引理 3[13,16] 设 E 为 Banach 空间，P 为 E 中正规体锥，$\exists\, u_1 \in -P\backslash\{\theta\}$，$\exists\, u_2 \in P\backslash\{\theta\}$，使得 A：$[u_1,\ u_2] \to E$ 全连续、强增，并且 $u_1 \leqslant Au_1$，$Au_2 \leqslant u_2$，又设 $A\theta = \theta$，A'_θ 存在且具有强增性，$r(A'_{x_0}) > 1$，A'_θ

的特征值记为 $\lambda(\lambda\neq 1)$，且 $\lambda<1$ 时全部特征值的代数重数之和为偶数，则 $x=Ax$ 至少存在一变号解.

2　主要定理

定理 1　设(H_1),(H_2),(H_3) 成立，又设 $\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\rho<\dfrac{1}{M_1}$，$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\eta<\dfrac{1}{M_1}$，其中 $M_1=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 k(x,y)\mathrm{d}y$，则边值问题(1)(2) 至少有 1 个变号解.

证　令 $X=C[0,1]$，$Q=\{\varphi\in X\mid\varphi(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[0,1]\}$，$E=X_{u^*}=\{x\in X\mid-\lambda u^*\leqslant x\leqslant\lambda u^*,\ \exists\lambda>0\}$，$P=Q\cap E$，令 $F\varphi=f(\varphi(x))$，$\varphi\in X$，显然 $F:E\to X$，下证

$$K:X\to E \tag{5}$$

对任意的 $\varphi\in X$，由引理 1 及 $k(x,y)$ 的表达式，有

$$\begin{aligned}K\varphi(x)=&\int_0^1 k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{w}\int_0^x u(y)v(x)\varphi(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{w}\int_x^1 u(y)v(x)\varphi(y)\mathrm{d}y\leqslant\\&\frac{u(x)v(x)}{w}\Big[\int_0^x|\varphi(y)|\mathrm{d}y\Big]+\frac{u(x)v(x)}{w}\Big[\int_x^1|\varphi(y)|\mathrm{d}y\Big]=\frac{u(x)v(x)}{w}\Big[\int_0^1|\varphi(y)|\mathrm{d}y\Big]=\\&\tilde{\lambda}u^*(x)\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\tilde{\lambda}=\dfrac{M_2^2}{w}\int_0^1|\varphi(y)|\mathrm{d}y$

类似地，有

$$K\varphi(x)\geqslant-\tilde{\lambda}u^*(x),\ \forall x\in[0,1] \tag{7}$$

于是由(6)(7) 式，即知(5) 式成立. 这样便有 $A=KF:E\to E$，且有假设知 A 是全连续的.

又对任给的 $\varphi\in P$，则 $\varphi(x)\geqslant 0$，$0\leqslant x\leqslant 1$，由引理 1 得到

$$K\varphi(x)=\int_0^1 k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y>\int_0^1 u^*(x)k(z,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=u^*(x)K\varphi(z)\gg\theta,\ 0\leqslant z\leqslant 1$$

从而 K 是强增的，于是 $A'_\theta=\tau K$ 也是强增的. 由(H_2) 即知 $F(u)$ 严格增，且由 $f(0)=0$ 知 $F(\theta)=\theta$，从而 $A(\theta)=\theta$. 由(H_3) 知当 A'_θ 全部特征值都小于 1，其代数重数之和为 $2n_0$，$n_0\in Z$. 因 K 的特征值不是 τ，故 A'_θ 的特征值不是 1.

另外

$$r(A'_\theta)=\tau r(K)=\frac{\tau}{\lambda_1}>\frac{\lambda_{2n_0}}{\lambda_1}>\frac{\lambda_1}{\lambda_1}=1$$

下面证明：存在 $\exists u_1\in-P\backslash\{\theta\}$，$\exists u_2\in P\backslash\{\theta\}$，使得 $u_1\leqslant Au_1$，$Au_2\leqslant u_2$.

由(H_4) 可知存在 $M_3>0$，使得$\dfrac{f(-M_3)}{-M_3}\leqslant\dfrac{1}{M_1}$. 由 f 的增性知

$$f\Big(-M_3\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\Big)\geqslant f(-M_3)\geqslant-\frac{M_3}{M_1}$$

由此结合算子 A 的表达式，得

$$\begin{aligned}A\Big(-M_3\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\Big)\geqslant&-\int_0^1 k(x,y)f\Big(-M_3\frac{u(y)v(y)}{M_2^2}\Big)\mathrm{d}y\geqslant\\&\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\int_0^1 k(z,y)f\Big(-M_3\frac{u(y)v(y)}{M_2^2}\Big)\mathrm{d}y\geqslant\\&-\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\frac{M_3}{M_1}\int_0^1 k(x,y)\mathrm{d}y\geqslant\\&-M_3\frac{u(x)v(x)}{M_2^2}\end{aligned}$$

即 $-M_3\dfrac{u(x)v(x)}{M_2^2}\in X_{u^*}$ 就是我们要找的 u_1. 同理知存在 $u_2\in P\backslash\{\theta\}$，使得 $Au_2\leqslant u_2$. 至此引理 3 的所有条件满足，故边值问题(1)(2) 至少有 1 个变号解.

定理 2 设(H_1),(H_3) 成立，又设 $f(u):(-\infty,+\infty)\to R^1$ 连续，$f(0)=0$ 且 $\exists M>0$，使得当 $u_1>u_2$ 时，有 $f(u_1)-f(u_2)>-M(u_1-u_2)$，$\overline{\lim\limits_{|u|\to\infty}}\dfrac{f(u)}{u}<\lambda_1$，则边值问题(1)(2) 至少有一个变号解.

证 由$\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\dfrac{f(u)}{u}<\lambda_1$ 知 $\exists R>0$，$\varepsilon>0$，$u\geqslant R$ 时

$$0\leqslant f(u)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)u$$

设 $c=\max\{f(u):0\leqslant u\leqslant R\}$，则

$$0\leqslant f(u)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)u+c,\ \forall u\in[0,+\infty)$$

从而 $\theta\leqslant A\varphi\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)K\varphi+\bar{c}$

考察如下算子方程

$$\varphi=(\lambda_1-\varepsilon)K\varphi+\bar{c}$$

因 A 的谱半径 $r(A)=\dfrac{\lambda_1-\varepsilon}{\lambda_1}<1$，故由引理 2 知存在唯一的解 $\varphi_0\gg\theta$，所以

$$\theta\leqslant A\varphi_0\leqslant(\lambda_1-\varepsilon)K\varphi_0+\bar{c}=\varphi_0$$

φ_0 就是我们要找的 u_2.

对$\overline{\lim\limits_{u\to-\infty}}\dfrac{f(u)}{u}<\lambda_1$，作变化 $g(-v)=f(u)$，则

$$\overline{\lim_{u\to-\infty}}\frac{f(u)}{u}<\lambda_1\Leftrightarrow\overline{\lim_{u\to+\infty}}\frac{g(v)}{v}<\lambda_1$$

与上面相同的证明得 $\varphi_1\leqslant A\varphi_1$，故 φ_1 也就是我们要找的 u_1. 其余证明同定理 1. 至此，引理 3 的所有条件满足，故边值问题(1)(2) 至少有 1 个变号解.

注 1 P 体锥可以减弱为锥，A 强增算子可以减弱为增算子，并不影响定理的结果. 另外，由于 $\lambda_1<\dfrac{1}{M_1}$，其中 $M_1=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\int_0^1 k(x,y)\mathrm{d}y$，且问题是在 X_{u^*} 空间讨论，故对文献[13]相应结论做了一定程度的改进.

注 2 此结果的创新之处在于得到了变号解的存在性.

下面考虑更一般的情况. 考察 Hammerstein 积分方程

$$\varphi(x)=\int_G k(x,y)f(y,\varphi(y))\mathrm{d}y=A\varphi(x)\tag{8}$$

其中 G 表示 R^N 中某有界闭域.

令

$$K\varphi(X)=\int_G k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,\ \forall\varphi\in C(G)$$

$$F(\varphi(x))=f(\varphi(y)),\ \forall\varphi\in\{\varphi\in C(G),\varphi(x)\geqslant 0\}$$

定理 3 假设如下条件满足

(H_1) 设 $\forall(x,y)\in G\times G$，$k(x,y)>0$，$k(x,y)\in C(G\times G)$；

(H_2) $f(u)\in C([a,b])$，$a<0$，$b>0$，又设 $f(u)$ 关于 u 是严格增的，并且令 $m=\min\limits_{x\in G}\int_G k(x,y)\mathrm{d}y$，$M=\max\limits_{x\in G}\int_G k(x,y)\mathrm{d}y$，使得 $mf(a)\geqslant a$，$Mf(b)\leqslant b$；

(H_3) $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在且 $f'(0)=\alpha$；

(H_4) 对于全部介于 0 与 α 之间的特征值，其代数重数之和为偶数；
则问题(8) 至少存在一变号解.

证　令 $E=C(G)$，$P=\{\varphi \mid \varphi \in C(G),\ \varphi(x) \geqslant 0\}$，则 P 是 E 中一个正规体锥. 令 $\psi_1(x) \equiv a$，$\psi_2(x) \equiv b$. 显然，$A: [\psi_1, \psi_2] \to C(G)$ 全连续. 由所设条件易知：当 $\varphi < \psi$(即 $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$，$\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$) 时，必有 $K\varphi \ll K\psi$(即 $K\varphi(x) < K\psi(x)$)，因此 K 是强增的，从而 A 强增. 另外，有

$$A\psi_1(x)=\int_G k(x,y)f(a)\mathrm{d}y \geqslant \frac{a}{m}\int_G k(x,y)\mathrm{d}y \geqslant a=\psi_1(x)$$

同理可知 $A\psi_2(x) \leqslant \psi_2(x)$.

又 $A'_\theta=\alpha K$，故 A'_θ 也是强增的. 由(H_2) 即知 $F\varphi$ 严格增，且由 $f(0)=0$ 知 $F\theta=\theta$，从而 $A\theta=\theta$. 下证 $A'(\theta)=\alpha K$

由(H_3) 知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|u|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{f(u)}{u}-\alpha\right|<\varepsilon$，即

$$|f(u)-\alpha u|<\varepsilon|u|,\ \forall\ |u|<\delta$$

因此，当 $u \in E$，$0<\|u\|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\|Au-A\theta-\alpha Ku\| &= \|Kf(u)-\alpha Ku\| \leqslant \\ &\|K\| \cdot \|f(u)-\alpha u\| < \\ &\varepsilon\|K\|\ \|u\|\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\|u\|\to 0}\dfrac{\|Au-A\theta-\alpha Ku\|}{\|u\|}=0$. 故 A 在 θ 处可微，并且 $A'_\theta=\alpha K$.

由(H_4) 设 λ_1 是 K 的第一特征值，则 $\alpha>\lambda_1$，且满足代数重数之和是偶数，又因 K 的特征值不是 α，故 A'_θ 的特征值不为 1. 所以

$$r(A'_\theta)=\alpha r(K)=\frac{\alpha}{\lambda_1}>\frac{\lambda_{2n_0}}{\lambda_1}>\frac{\lambda_1}{\lambda_1}=1$$

至此，引理 3 的所有条件满足，故问题(8) 至少有一个变号解.

参考文献：

[1] ZHANG M Z. Regular Approximation of Singular Sturm-Liouville Problems with Tramsmission Conditions [J]. Applied Mathematics & Computation，2014，247(9)：511－520.

[2] MUKHTAROV O S，AYDEMIR. Eigenfunction Expansion for Sturm-Liouville Problems with Tramsmission Conditions at One Ihterior Point [J]. Actu Muthematica Scientiu，2015，35(3)：639－649.

[3] 高婷梅. 一类带有凹凸非线性项的 p-拉普拉斯方程一对正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：21－26.

[4] WILKENINY J，CENFON A. A Spectral Transform Method for Singular Sturm-Liouville Problems with Applications to Energy Diffusion in Plusma Physics [J]. Siam J Appl Math，2013，75(2)：350－392.

[5] 张兴秋. 奇异半正 Sturm_Liouville 边值问题的多个正解 [J]. 应用数学学报，2013，36(3)：1094－1107.

[6] NI X，GE W. A Existence of Positive Solutions for Boundary Value Problems on the Semi-Infinite Interval [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics Nonlinear，2005，20(3)：380－384.

[7] 孙经先，李红玉. 奇异非线性 Sturm-Liouville 边值问题正解的全局结构 [J]. 数学物理学报，2008，28A(3)：424－433.

[8] 李红玉，孙经先，崔玉军. 双重 Hammerstein 型积分方程正解的存在性 [J]. 工程数学学报，2008，25(5)：931－934.

[9] 李红玉，孙经先，崔玉军. 超线性非线性 Sturm-Liouville 边值问题的正解 [J]. 数学年刊，2010，31A(2)：183－188.

[10] 张　杰. 一类 Semipositone 问题的多个正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(6)：31－34.

[11] 杨景保. 一类 Sturm-Liouville 边值问题正解的存在性 [J]. 山东大学学报(理学版)，2010，45(2)：84－89.

[12] 张玲忠，李永祥. Banach空间非线性Sturm-Liouville边值问题的正解[J]. 数学物理学报，2009，29A(3)：784－793.
[13] 张克梅，孙经先. 非线性算子方程变号解的存在性及其应用[J]. 数学学报，2003，46(4)：815－822.
[14] 崔玉军，孙经先. Banach空间非线性Sturm-Liouville问题的解[J]. 系统科学与数学，2009，29(2)：208－214.
[15] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis [M]. Beijing：World Publishing Corporation，1988.
[16] 纪宏伟，孙经先. 抽象空间中非线性算子方程变号解的存在性研究[J]. 数学的实践与认识，2017，47(2)：257－263.

Sign-changing Solutions to the nonlinear Sturm-Liouville boundary value problem

JI Hong-wei
Department of mathematics and physics，Nantong Teachers College，Nantong Jiangshu 226010，China

Abstract：In this paper，consider the existence of sign-changing solutions for the nonlinear Sturm-Liouville boundary value problem

$$L\varphi = f\varphi,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

$$\alpha\varphi(0) - \beta\varphi'(0) = 0,\ \gamma\varphi(1) + \delta\varphi'(1) = 0$$

Besides，the existence of sign-changing solutions and the more general case of the Hammerstein integral equation are studied，and the general results are obtained，and the previous work is improved.

Key words：Sturm-Liouville Two point boundary value problem，sign-changing solutions，Hammerstein integral equation

责任编辑 夏 娟