DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.06.001

非负矩形张量最大奇异值的 S-型上界[①]

桑彩丽， 赵建兴

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

摘要： 通过将集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分为非空真子集 S 及其补集 $\overline{S}$，给出非负矩形张量 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值 λ_0 的一个 S-型上界，改进了某些已有结果. 最后，通过数值算例对理论结果进行验证，显示所得上界比现有估计精确且在某些情况下能达到真值.

关 键 词： 非负张量；矩形张量；奇异值；上界

中图分类号： O151.21 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2018)06-0001-05

非负矩形张量的奇异值在固体力学中的强椭圆性条件和量子物理学中的纠缠问题[1]等诸多领域应用广泛，现已成为应用数学和数值代数领域的重要研究课题[2-6]. 目前，对非负矩阵最大特征值的研究已有很多结果[7-8]，但对非负矩形张量最大奇异值的研究才刚刚开始. 就目前资料看，仅有一些初步结果[9-10]，这些不足造成了张量谱理论自身的不完备，从而使其应用受到了限制. 本文考虑非负矩形张量 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值 λ_0 的上界估计问题，并利用 $\boldsymbol{A}$ 的元素给出 λ_0 的更精确的上界.

1 预备知识

用 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 表示实(复)数集，p,q,m,n 为正整数，$m,n\geqslant 2$，且 $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q})$，如果

$$a_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}\in\mathbb{R}\qquad 1\leqslant i_1,\cdots,i_p\leqslant m,\ 1\leqslant j_1,\cdots,j_q\leqslant n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 (p,q) 阶 $m\times n$ 维实矩形张量，记作 $\boldsymbol{A}\in R^{[p,q;m,n]}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素均为非负实数，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩形张量，记作 $\boldsymbol{A}\in R_+^{[p,q;m,n]}$. 如果存在 $\lambda\in\mathbb{C}$ 和非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，$y=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 满足多元齐次方程组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q}=\lambda\boldsymbol{x}^{[l-1]} & (1)\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1}=\lambda\boldsymbol{y}^{[l-1]} & (2)\end{cases}$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 分别为相应于 λ 的左、右特征向量. 其中 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q}$ 和 $\boldsymbol{x}^{[l-1]}$ 为 m 维向量，它们的第 i 个分量分别为：

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p-1}\boldsymbol{y}^{q})_i=\sum_{i_2,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_1,\cdots,j_q=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_p j_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q}\qquad(\boldsymbol{x}^{[l-1]})_i=x_i^{l-1}$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1}$ 和 $\boldsymbol{y}^{[l-1]}$ 为 n 维向量，它们的第 j 个分量分别为：

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{p}\boldsymbol{y}^{q-1})_j=\sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{m}\sum_{j_2,\cdots,j_q=1}^{n}a_{i_1\cdots i_p j j_2\cdots j_q}x_{i_1}\cdots x_{i_p}y_{j_2}\cdots y_{j_q}\qquad(\boldsymbol{y}^{[l-1]})_j=y_j^{l-1}$$

---

① 收稿日期：2017-02-27

基金项目：国家自然科学基金项目(11501141)；贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2015]2073 号)；贵州省教育厅科技拔尖人才支持项目(黔教合 KY 字[2016]066 号).

作者简介：桑彩丽(1988-)，女，讲师，主要从事数值代数的研究.

通信作者：赵建兴，教授.

记 $\lambda_0 = \max\{|\lambda|: \lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值$\}$，称其为 $\boldsymbol{A}$ 的最大奇异值.

在文献[1]中，称 $p=q=2$，$m=n=2,3$ 时的矩形张量 $\boldsymbol{A}$ 为弹性张量，其在非线性弹性材料中有着重要的应用. 本文就 $m=n$ 这种情况，给出 λ_0 的一个上界，该上界改进了某些已有结果.

2　主要结果

对任意 $i,j\in N$，$i\neq j$，记：

$$R_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{i_2,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\in N} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}$$

$$C_j(\boldsymbol{A}) = \sum_{i_1,\cdots,i_p,j_2,\cdots,j_q\in N} a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q}$$

$$r_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq i\cdots ii\cdots i} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} = R_i(\boldsymbol{A}) - a_{i\cdots ii\cdots i}$$

$$r_i^j(\boldsymbol{A}) = \sum_{\substack{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq i\cdots ii\cdots i\\ ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq ij\cdots jj\cdots j}} a_{ii_2\cdots i_pj_1\cdots j_q} = r_i(\boldsymbol{A}) - a_{ij\cdots jj\cdots j}$$

$$c_j(\boldsymbol{A}) = \sum_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q\neq j\cdots jj\cdots j} a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q} = C_j(\boldsymbol{A}) - a_{j\cdots jj\cdots j}$$

$$c_j^i(\boldsymbol{A}) = \sum_{\substack{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q\neq j\cdots jj\cdots j\\ i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q\neq i\cdots iji\cdots i}} a_{i_1\cdots i_pjj_2\cdots j_q} = c_j(\boldsymbol{A}) - a_{i\cdots iji\cdots i}$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A}\in R_+^{[p,q;n,n]}$，$S$ 为 N 的非空真子集，$\overline{S}$ 为 S 在 N 中的补集，则

$$\lambda_0 \leqslant \Delta^S(\boldsymbol{A}) = \max\left\{\max_{i\in S,\ j\in\overline{S}} \overline{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A}),\ \max_{i\in\overline{S},\ j\in S} \overline{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A}),\ \max_{i\in S,\ j\in\overline{S}} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A}),\ \max_{i\in\overline{S},\ j\in S} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A})\right\}$$

其中：

$$\overline{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\boldsymbol{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\boldsymbol{A}))^2 + 4a_{ij\cdots jj\cdots j}\max\{r_j(\boldsymbol{A}),\ c_j(\boldsymbol{A})\}]^{\frac{1}{2}}\}$$

$$\overset{o}{\Delta}_{i,j}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\boldsymbol{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\boldsymbol{A}))^2 + 4a_{j\cdots jij\cdots j}\max\{r_j(\boldsymbol{A}),\ c_j(\boldsymbol{A})\}]^{\frac{1}{2}}\}$$

证　由文献[9]的定理 2 知，对于 λ_0，存在非负非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 使得(1)式和(2)式成立. 设 $x_t=\max\limits_{i\in S}\{x_i\}$，$x_g=\max\limits_{i\in\overline{S}}\{x_i\}$，$y_h=\max\limits_{i\in S}\{y_i\}$，$y_v=\max\limits_{i\in\overline{S}}\{y_i\}$，$w_i=\max\{x_i,\ y_i\}$，$w_S=\max\limits_{i\in S}\{w_i\}$，$w_{\overline{S}}=\max\limits_{i\in\overline{S}}\{w_i\}$. 则 x_t 和 x_g 中至少有 1 个是正数，y_h 和 y_v 中至少有 1 个是正数. 下面分 4 种情形来证明.

情形 1　设 $w_S=x_t$，$w_{\overline{S}}=x_g$，则 $x_t\geqslant y_t$，$x_g\geqslant y_g$.

情形 1.1　若 $x_t\geqslant x_g$，则 $x_t=\max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 由(1)式的第 t 个方程

$$\lambda_0 x_t^{l-1} = \sum_{\substack{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq t\cdots tt\cdots t\\ ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq tg\cdots gg\cdots g}} a_{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q} + a_{t\cdots tt\cdots t}x_t^{p-1}y_t^q + a_{tg\cdots gg\cdots g}x_g^{p-1}y_g^q$$

得

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - a_{t\cdots tt\cdots t})x_t^{l-1} \leqslant{}& \lambda_0 x_t^{l-1} - a_{t\cdots tt\cdots t}x_t^{p-1}y_t^q = \\ & \sum_{\substack{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq t\cdots tt\cdots t\\ ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq tg\cdots gg\cdots g}} a_{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}x_{i_2}\cdots x_{i_p}y_{j_1}\cdots y_{j_q} + a_{tg\cdots gg\cdots g}x_g^{p-1}y_g^q \leqslant \\ & \sum_{\substack{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq t\cdots tt\cdots t\\ ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q\neq tg\cdots gg\cdots g}} a_{ti_2\cdots i_pj_1\cdots j_q}x_t^{l-1} + a_{tg\cdots gg\cdots g}x_g^{l-1} = \\ & r_t^g(\boldsymbol{A})x_t^{l-1} + a_{tg\cdots gg\cdots g}x_g^{l-1}\end{aligned}$$

即

$$(\lambda_0 - a_{t\cdots tt\cdots t} - r_t^g(\boldsymbol{A}))x_t^{l-1} \leqslant a_{tg\cdots gg\cdots g}x_g^{l-1} \tag{3}$$

若 $x_g=0$，则由 $x_t>0$ 得

$$\lambda_0 \leqslant a_{t\cdots tt\cdots t} + r_t^g(\mathbf{A}) \leqslant \overline{\Delta}_{t,g}(\mathbf{A}) \leqslant \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \overline{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})$$

若 $x_g > 0$，由(1)式的第 g 个方程

$$\lambda_0 x_g^{l-1} = a_{g\cdots gg\cdots g} x_g^{p-1} y_g^q + \sum_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q \neq g\cdots gg\cdots g} a_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_{i_2}\cdots x_{i_p} y_{j_1}\cdots y_{j_q}$$

得

$$\begin{aligned}(\lambda_0 - a_{g\cdots gg\cdots g}) x_g^{l-1} \leqslant & \lambda_0 x_g^{l-1} - a_{g\cdots gg\cdots g} x_g^{p-1} y_g^q = \\ & \sum_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q \neq g\cdots gg\cdots g} a_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_{i_2}\cdots x_{i_p} y_{j_1}\cdots y_{j_q} \leqslant \\ & \sum_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q \neq g\cdots gg\cdots g} a_{gi_2\cdots i_p j_1\cdots j_q} x_t^{l-1} = \\ & r_g(\mathbf{A}) x_t^{l-1}\end{aligned}$$

即

$$(\lambda_0 - a_{g\cdots gg\cdots g}) x_g^{l-1} \leqslant r_g(\mathbf{A}) x_t^{l-1} \tag{4}$$

由文献[5]的引理 2.1 知 $\lambda_0 \geqslant \max\limits_{i\in N}\{a_{i\cdots ii\cdots i}\} \geqslant a_{g\cdots gg\cdots g}$. 将(3)式和(4)式相乘，并消去 $x_t^{l-1} x_g^{l-1}$，可得

$$(\lambda_0 - a_{t\cdots tt\cdots t} - r_t^g(\mathbf{A}))(\lambda_0 - a_{g\cdots gg\cdots g}) \leqslant a_{tg\cdots gg\cdots g} r_g(\mathbf{A}) \tag{5}$$

由(5)式可得

$$\begin{aligned}\lambda_0 \leqslant & \frac{1}{2}\{a_{t\cdots tt\cdots t} + a_{g\cdots gg\cdots g} + r_t^g(\mathbf{A}) + [(a_{t\cdots tt\cdots t} - a_{g\cdots gg\cdots g} + r_t^g(\mathbf{A}))^2 + 4a_{tg\cdots gg\cdots g} r_g(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \\ & \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{ij\cdots jj\cdots j} r_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \overline{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

情形 1.2　若 $x_g \geqslant x_t$，则 $x_g = \max\limits_{i\in \mathbf{N}}\{w_i\}$. 类似于情形 1.1 的证明，可得

$$\begin{aligned}\lambda_0 \leqslant & \frac{1}{2}\{a_{g\cdots gg\cdots g} + a_{t\cdots tt\cdots t} + r_g^t(\mathbf{A}) + [(a_{g\cdots gg\cdots g} - a_{t\cdots tt\cdots t} + r_g^t(\mathbf{A}))^2 + 4a_{gt\cdots tt\cdots t} r_t(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \\ & \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{ij\cdots jj\cdots j} r_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \overline{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

情形 2　设 $w_S = y_h$，$w_{\overline{S}} = y_v$，则 $y_h \geqslant x_h$，$y_v \geqslant x_v$.

若 $y_h \geqslant y_v$，此时 $y_h = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 考虑(2)式的第 h 个和第 v 个方程，并应用类似于情形 1 的证明，可得

$$(\lambda_0 - a_{h\cdots hh\cdots h} - c_h^v(\mathbf{A})) y_h^{l-1} \leqslant a_{v\cdots vhv\cdots v} y_v^{l-1}$$

和

$$(\lambda_0 - a_{v\cdots vv\cdots v}) y_v^{l-1} \leqslant c_v(\mathbf{A}) y_h^{l-1}$$

进而可得

$$(\lambda_0 - a_{h\cdots hh\cdots h} - c_h^v(\mathbf{A}))(\lambda_0 - a_{v\cdots vv\cdots v}) \leqslant a_{v\cdots vhv\cdots v} c_v(\mathbf{A})$$

解之得

$$\begin{aligned}\lambda_0 \leqslant & \frac{1}{2}\{a_{h\cdots hh\cdots h} + a_{v\cdots vv\cdots v} + c_h^v(\mathbf{A}) + [(a_{h\cdots hh\cdots h} - a_{v\cdots vv\cdots v} + c_h^v(\mathbf{A}))^2 + 4a_{v\cdots vhv\cdots v} c_v(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \\ & \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{j\cdots jij\cdots j} c_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

若 $y_v \geqslant y_h$，则 $y_v = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 类似地，可得

$$\begin{aligned}\lambda_0 \leqslant & \frac{1}{2}\{a_{v\cdots vv\cdots v} + a_{h\cdots hh\cdots h} + c_v^h(\mathbf{A}) + [(a_{v\cdots vv\cdots v} - a_{h\cdots hh\cdots h} + c_v^h(\mathbf{A}))^2 + 4a_{h\cdots hvh\cdots h} c_h(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \\ & \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{j\cdots jij\cdots j} c_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})\end{aligned}$$

情形 3　设 $w_S = x_t$，$w_{\overline{S}} = y_v$，则 $x_t \geqslant y_t$，$y_v \geqslant x_v$.

若 $x_t \geqslant y_v$，则 $x_t = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 类似地，可得

$$(\lambda_0 - a_{t\cdots tt\cdots t} - r_t^v(\mathbf{A}))(\lambda_0 - a_{v\cdots vv\cdots v}) \leqslant a_{tv\cdots vv\cdots v} c_v(\mathbf{A})$$

从而可得

$$\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}\{a_{t\cdots tt\cdots t} + a_{v\cdots vv\cdots v} + r_t^v(\mathbf{A}) + [(a_{t\cdots tt\cdots t} - a_{v\cdots vv\cdots v} + r_t^v(\mathbf{A}))^2 + 4a_{tv\cdots vv\cdots v} c_v(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{ij\cdots jj\cdots j} c_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \overline{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})$$

若 $y_v \geqslant x_t$，则 $y_v = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 类似地，可得

$$\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}\{a_{v\cdots vv\cdots v} + a_{t\cdots tt\cdots t} + r_v^t(\mathbf{A}) + [(a_{v\cdots vv\cdots v} - a_{t\cdots tt\cdots t} + r_v^t(\mathbf{A}))^2 + 4a_{vt\cdots tt\cdots t} c_t(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + r_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{ij\cdots jj\cdots j} c_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \overline{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})$$

情形 4　设 $w_S = y_h$，$w_{\overline{S}} = x_g$，则 $y_h \geqslant x_h$，$x_g \geqslant y_g$.

若 $y_h \geqslant x_g$，则 $y_h = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 类似地，可得

$$(\lambda_0 - a_{h\cdots hh\cdots h} - c_h^g(\mathbf{A}))(\lambda_0 - a_{g\cdots gg\cdots g}) \leqslant a_{g\cdots ghg\cdots g} r_g(\mathbf{A})$$

和

$$\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}\{a_{h\cdots hh\cdots h} + a_{g\cdots gg\cdots g} + c_h^g(\mathbf{A}) + [(a_{h\cdots hh\cdots h} - a_{g\cdots gg\cdots g} + c_h^g(\mathbf{A}))^2 + 4a_{g\cdots ghg\cdots g} r_g(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{j\cdots jij\cdots j} r_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in S,\ j\in \overline{S}} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})$$

若 $x_g \geqslant y_h$，则 $x_g = \max\limits_{i\in N}\{w_i\}$. 类似地，可得

$$\lambda_0 \leqslant \frac{1}{2}\{a_{g\cdots gg\cdots g} + a_{h\cdots hh\cdots h} + c_g^h(\mathbf{A}) + [(a_{g\cdots gg\cdots g} - a_{h\cdots hh\cdots h} + c_g^h(\mathbf{A}))^2 + 4a_{h\cdots hgh\cdots h} r_h(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \frac{1}{2}\{a_{i\cdots ii\cdots i} + a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}) + [(a_{i\cdots ii\cdots i} - a_{j\cdots jj\cdots j} + c_i^j(\mathbf{A}))^2 + 4a_{j\cdots jij\cdots j} r_j(\mathbf{A})]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i\in \overline{S},\ j\in S} \overset{o}{\Delta}_{i,j}(\mathbf{A})$$

应用类似于文献[10]中定理 3.2 的证明，可得：

定理 2　设 $\mathbf{A} \in R_+^{[p,\ q;\ n,\ n]}$，则由定理 1 得到的 λ_0 的上界比由文献[3]中定理 4 得到的上界精确，即

$$\lambda_0 \leqslant \Delta^S(\mathbf{A}) \leqslant \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{R_i(\mathbf{A}),\ C_j(\mathbf{A})\}$$

3　数值算例

例 1　设 $\mathbf{A} \in R_+^{[2,\ 2;\ 3,\ 3]}$，其中：

$$\mathbf{A}(:,:,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(:,:,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(:,:,3,1) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(:,:,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(:,:,2,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(:,:,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(:,:,1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(:,:,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(:,:,3,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

下面对 λ_0 的上界进行估计．由文献[9]的定理 4 得 $\lambda_0 \leqslant 46$．取 $S=\{1\}$，$\overline{S}=\{2,3\}$，由定理 1 得 $\lambda_0 \leqslant 41$．事实上，$\lambda_0 = 30.547\,5$．

例 1 表明，由定理 1 得到的 λ_0 的上界比由文献[9]中定理 4 得到的上界精确．

例 2　设 $\boldsymbol{A} \in R_{+}^{[2,2;2,2]}$，其中 $a_{1111}=a_{1112}=a_{1222}=a_{2112}=a_{2121}=a_{2221}=1$，其余元素均为 0．由定理 1 得 $\lambda_0 \leqslant 3$．事实上，$\lambda_0 = 3$．

例 2 表明，由定理 1 得到的 λ_0 的上界可以达到真值．

参考文献：

[1] CHANG K C，QI L Q，ZHOU G L. Singular Values of a Real Rectangular Tensor [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，370(1)：284－294.

[2] CHEN Z，LU L Z. A Tenor Singular Values and Its Symmetric Embedding Eigenvalues [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2013，250(10)：217－228.

[3] CHEN Z M，QI L Q，YANG Q Z，et al. The Solution Methods for the Largest Eigenvalue (Singular Value) of Nonnegative Tensors and Covergence Analysis [J]. Linear Algebra and Its Applications，2013，439(12)：3713－3733.

[4] ZHOU G L，CACCETTA L，QI L Q. Convergence of an Algorithm for the Largest Singular Value of a Nonnegative Rectangular Tensor [J]. Linear Algebra and Its Applications，2013，438(12)：959－968.

[5] HE J，LIU Y M，KE H，et al. Bound for the Largest Singular Value of Nonnegative Rectangular Tensors [J]. Open Mathematics，2016，14(1)：761－766.

[6] JOHNSON C R，PENA J M，SZULC T. Optimal Gersgorin-Style Estimation of the Largest Singular Value II [J]. Electronic Journal of Linear Algebra，2016，31：679－685.

[7] 董培佩. 不可约非负矩阵谱半径的新估算 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(9)：27－31.

[8] 钟　琴. 非负矩阵最大特征值的新界值 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：40－43.

[9] YANG Y N，YANG Q Z. Singular Values of Nonnegative Rectangular Tensors [J]. Frontiers of Mathematics in China，2011，6(2)：363－378.

[10] ZHAO J X，LI C Q. Singular Value Inclusion Sets for Rectangular Tensors [J]. Linear and Multilinear Algebra，2018，66(7)：1333－1350.

An S-Type Upper Bound for the Largest Singular Value of Nonnegative Rectangular Tensors

SANG Cai-li，　ZHAO Jian-xing

College of Data Science and Information Engineering，Guizhou Minzu University，Guiyang 550025，China

Abstract：By breaking $N=\{1,2,\cdots,n\}$ into disjoint subsets S and its complement $\overline{S}$，an S-type upper bound for the largest singular value λ_0 of a nonnegative rectangular tensor $\boldsymbol{A}$ is given and proved to be an improvement of some existing results. Finally，the obtained result is verified by numerical examples to show that it is more accurate than some existing results and could reach the true value of the largest singular value in some cases.

Key words：nonnegative tensor；rectangular tensor；singular value；upper bound

责任编辑　廖　坤　崔玉洁