第 43 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 6 月
Vol. 43 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.06.002

M-矩阵最小特征值的上界序列①

钟 琴, 赵春燕, 王 妍, 周 鑫

四川大学 锦江学院 数学教学部, 四川 彭山 620860

摘要: M-矩阵最小特征值的估计是矩阵理论研究中的重要组成部分. 如果上下界能够表示为关于 M-矩阵元素的易于计算的函数, 那么这种估计价值更高. 通过构造 3 个收敛序列得到 M-矩阵最小特征值的新界值. 该方法易于计算且能得到较紧的界, 数值算例表明其结果比有关结论更加精确.

关 键 词: M-矩阵; 最小特征值; 上界; 非负矩阵; 谱半径

中图分类号: O151.21; O241.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2018)06-0006-05

M-矩阵是计算数学相关领域中应用极其广泛的重要矩阵类. 它有广泛的应用背景, 出现在经济价值模型矩阵和反网络分析的系数矩阵以及某类微分方程的数值解中. 生物学、物理学、数学等学科中的许多问题都和M-矩阵有着密切的关系. M-矩阵最小特征值的计算一直是矩阵分析与计算数学领域里的热门课题, 近年来受到许多学者的青睐, 并取得了一系列的研究成果[1-10].

用 $R^{n\times n}$ 表示全体 n 阶实矩阵的集合. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 若 $a_{ij}\geqslant 0$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵, 记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$. 用 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱, $\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径. 设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$, 若 $\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$, $s>\rho(\boldsymbol{B})$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M-矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 若 $a_{ij}\leqslant 0$, $i\neq j$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z-矩阵, 记为 $\boldsymbol{A}\in Z^{n\times n}$. 记

$$q(\boldsymbol{A})=\min\{\mathrm{Re}(\lambda): \lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$$

称 $q(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的按模最小特征值, 简称最小特征值.

定义 1[1] 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$, 如果存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 分别是 k, l 阶方阵, $k\geqslant 1$ 和 $l\geqslant 1$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵, 否则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约矩阵.

定义 2[2] 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非负不可约矩阵, k 为模等于 $\rho(\boldsymbol{A})$ 的特征值的个数, 则当 $k=1$ 时称 $\boldsymbol{A}$ 为本原阵, 当 $k>1$ 时称 $\boldsymbol{A}$ 为指数为 k 的循环阵.

文献[3] 对 $q(\boldsymbol{A})$ 的界进行了估计, 得到了以下的估计结果:

定理 1[3] 设 $\boldsymbol{A}$ 为弱链对角占优 M-矩阵, 且设 $\boldsymbol{A}^{-1}=(\alpha_{ij})$, 则:

$$\min_i\sum_{j=1}^n a_{ij}\leqslant q(\boldsymbol{A})\leqslant \max_i\sum_{j=1}^n a_{ij} \tag{1}$$

$$\frac{1}{\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n \alpha_{ij}}\leqslant q(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{1}{\min\limits_i\sum\limits_{j=1}^n \alpha_{ij}} \tag{2}$$

① 收稿日期: 2017-06-01
基金项目: 四川省教育厅自然科学研究项目(18ZB0364); 四川大学锦江学院青年教师科研项目(QNJJ-2017-A09).
作者简介: 钟 琴(1982-), 女, 副教授, 主要从事矩阵理论及其应用的研究.

因为 M -矩阵的按模最小特征值 $q(\boldsymbol{A})>0$，而 M -矩阵的行和有时可能是 0 或负数，所以(1) 式给出的最小特征值 $q(\boldsymbol{A})$ 的估计有时会失去意义，(2) 式需要计算 M -矩阵的逆矩阵，计算量大.

定理 2[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为 M -矩阵，则

$$\min M(i,j)\leqslant q(\boldsymbol{A})\leqslant \max M(i,j) \tag{3}$$

其中

$$M(i,j)=\frac{1}{2}\{a_{ii}+a_{jj}-[(a_{ii}-a_{jj})^2+4\Lambda_i\Lambda_j]^{\frac{1}{2}}\}\qquad i\neq j,\ \Lambda_i=\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}a_{ij}$$

定理 3[5]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为不可约 M -矩阵，则

$$\min h_i(\boldsymbol{A})\leqslant q(\boldsymbol{A})\leqslant \max h_i(\boldsymbol{A}) \tag{4}$$

其中：

$$h_i(\boldsymbol{A})=\frac{\alpha R_i(\boldsymbol{A})-M_i(\boldsymbol{A})}{\alpha-R_i(\boldsymbol{A})}$$

$$\alpha=\max_i\{a_{ii}\}\qquad M_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}R_j(\boldsymbol{A})\qquad R_j(\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}$$

本文通过构造 3 个收敛序列得到 M -矩阵最小特征值的上界，所得到的界只依赖于 M -矩阵的元素，易于计算.

1　M -矩阵最小特征值的上界

定理 4[2]　设非负不可约矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是循环指数为 $k(k>1)$ 的循环阵，则对每一 $j\geqslant 1$ 都有 n 阶置换阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{PA}^{jk}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1^j & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{C}_2^j & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{C}_k^j\end{bmatrix}$$

其中每一 $\boldsymbol{C}_i$ 是本原阵，$1\leqslant i\leqslant k$，且有

$$\rho(\boldsymbol{C}_1)=\rho(\boldsymbol{C}_2)=\cdots=\rho(\boldsymbol{C}_k)=\rho^k(\boldsymbol{A})$$

下面给出 M -矩阵最小特征值的上界序列：

定理 5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为不可约 M -矩阵，令 $\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，其中 $a=\max\limits_i\{a_{ii}\}$，则对任意的自然数 t，有 $q(\boldsymbol{A})\leqslant a-\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}$，且序列 $\left\{a-\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right\}$ 单调递减，$\lim\limits_{t\to\infty}\left[a-\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right]=q(\boldsymbol{A})$.

证　显然 $\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\geqslant 0$，且不可约. 因为

$$[a-q(\boldsymbol{A})]^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B})^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B}^{2^t})\geqslant\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}$$

所以 $q(\boldsymbol{A})\leqslant a-\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}$.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值，则对任意的自然数 t，有

$$\left(\lambda_1^{2^t}-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^2+\left(\lambda_2^{2^t}-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^2+\cdots+\left(\lambda_n^{2^t}-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^2=$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{B}^{2^t}-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\boldsymbol{I}\right)^2=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^{t+1}}-\frac{(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t})^2}{n}\geqslant 0$$

所以 $\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^{t+1}}}{n}\right)^{2^{-(t+1)}}\geqslant\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}$，从而

$$a-\left(\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^{t+1}}}{n}\right)^{2^{-(t+1)}}\leqslant a-\left(\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}$$

所以序列$\left\{a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right\}$单调递减.

下面分 2 种情况证明$\lim\limits_{t\to\infty}\left[a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right]=q(\boldsymbol{A})$.

若$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$为本原阵，则$\lim\limits_{t\to\infty}(\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t})^{2^{-t}}=\rho(\boldsymbol{B})$，所以

$$\lim_{t\to\infty}\left[a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right]=a-\rho(\boldsymbol{B})=q(\boldsymbol{A})$$

若$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$是循环指数为$k(k>1)$的循环阵，根据定理 4，存在置换阵$\boldsymbol{P}$，使得对任意正整数$j$，有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^{jk}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1^j & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{C}_2^j & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{C}_k^j\end{pmatrix}$$

其中$\boldsymbol{C}_i$是本原阵，$1\leqslant i\leqslant k$，且有

$$\rho(\boldsymbol{C}_1)=\rho(\boldsymbol{C}_2)=\cdots=\rho(\boldsymbol{C}_k)=\rho^k(\boldsymbol{B})$$

令$\max\limits_i\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_i^j=\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_p^j$，$\min\limits_i\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_i^j=\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_q^j$，$1\leqslant p$，$q\leqslant k$，则有

$$\left(\frac{k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_q^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_i^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}\leqslant\left(\frac{k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_p^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}$$

因为$\boldsymbol{C}_p$,$\boldsymbol{C}_q$都是本原阵，故有：

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_q^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}=[\rho(\boldsymbol{C}_q)]^{\frac{1}{k}}=\rho(\boldsymbol{B})$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_p^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}=[\rho(\boldsymbol{C}_p)]^{\frac{1}{k}}=\rho(\boldsymbol{B})$$

根据夹逼准则可知$\lim\limits_{j\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_i^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}=\rho(\boldsymbol{B})$，从而有

$$\lim_{t\to\infty}\left[a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right]=a-\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{jk}}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}=a-\lim_{j\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^k\operatorname{tr}\boldsymbol{C}_i^j}{n}\right)^{\frac{1}{jk}}=a-\rho(\boldsymbol{B})=q(\boldsymbol{A})$$

定理 6 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为不可约 M-矩阵，令$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，其中$a=\max\limits_i\{a_{ii}\}$，则对任意的自然数$t$，有$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-\max\limits_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}$，且序列$\{a-\max\limits_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\}$单调递减，$\lim\limits_{t\to\infty}\{a-\max\limits_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\}=q(\boldsymbol{A})$.

证 因为

$$[a-q(\boldsymbol{A})]^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B})^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B}^{2^t})\geqslant\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]$$

所以

$$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}$$

对任意的自然数t，记$\boldsymbol{B}^{2^t}=(s_{ij})_{n\times n}$，则

$$\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^{t+1}})_{ii}]=\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t}\cdot\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]=\max_i\left(\sum_{k=1}^n s_{ik}s_{ki}\right)\geqslant\max_i(s_{ii})^2=\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^2$$

从而

$$\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^{t+1}})_{ii}]^{2^{-(t+1)}}\geqslant\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}$$

所以序列$\{a-\max\limits_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\}$单调递减. 因为$\max\limits_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]\geqslant\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}$，所以

$$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\leqslant a-[\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}]^{2^{-t}}$$

由于$\lim\limits_{t\to\infty}\left[a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}\right]=q(\boldsymbol{A})$，根据夹逼准则知

$$\lim_{t\to\infty}\{a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\}=q(\boldsymbol{A})$$

设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，文献[6－7]证明了 $\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}))\leqslant\rho(\boldsymbol{B})$，此处 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B})=(s_{ij})_{n\times n}$ 称为 $\boldsymbol{B}$ 的几何对称化矩阵，其中 $s_{ij}=\sqrt{a_{ij}a_{ji}}$. 文献[8]证明了以下定理：

定理 7[8]　设 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则$[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\leqslant\rho(\boldsymbol{B})$，且序列$\{[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}$单调递增.

定理 8　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为不可约 M -矩阵，令 $\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，其中 $a=\max\limits_i\{a_{ii}\}$，则对任意的自然数 t，有 $q(\boldsymbol{A})\leqslant a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}$，且序列$\{a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}$单调递减，$\lim\limits_{t\to\infty}\{a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}=q(\boldsymbol{A})$.

证　因为

$$[a-q(\boldsymbol{A})]^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B})^{2^t}=\rho(\boldsymbol{B}^{2^t})\geqslant\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))$$

所以

$$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}$$

又因为序列$\{[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}$单调递增，所以序列$\{a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}$单调递减.

考虑到

$$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\leqslant a-\max_i[(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))_{ii}]^{2^{-t}}=a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}$$

且

$$\lim_{t\to\infty}\{a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\}=q(\boldsymbol{A})$$

根据夹逼准则知

$$\lim_{t\to\infty}\{a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\}=q(\boldsymbol{A})$$

注 1　从定理 5、定理 6 和定理 8 的证明过程可以看出

$$q(\boldsymbol{A})\leqslant a-[\rho(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{B}^{2^t}))]^{2^{-t}}\leqslant a-\max_i[(\boldsymbol{B}^{2^t})_{ii}]^{2^{-t}}\leqslant a-\left(\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{B}^{2^t}}{n}\right)^{2^{-t}}$$

注 2　定理 5、定理 6 和定理 8 中 $\boldsymbol{A}$ 均为不可约 M -矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶可约 M -矩阵，则存在 n 阶置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm}\end{pmatrix}\qquad m\geqslant 2$$

其中块对角线上每块 $\boldsymbol{A}_{ii}(1\leqslant i\leqslant m)$ 或为不可约矩阵，或为一阶零矩阵. 显然

$$q(\boldsymbol{A})=q(\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}})=\min_i q(\boldsymbol{A}_{ii})$$

因此对可约 M -矩阵，施行合适的置换变换后，同样可以对其最小特征值进行估计.

2　数值算例

例 1　考虑 M -矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，真值 $q(\boldsymbol{A})\approx 0.382\,0$. 由文献[3]的(1)式和文献[4]的(3)式均可得 $q(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，由文献[5]的(4)式可得 $q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.5$. 以下是本文定理 5、定理 6 和定理 8 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 最小特征值上界的估计结果.

表1 M-矩阵最小特征值的上界

所用原理	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
定理5	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 2.3333$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 1.3670$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 1$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.7178$
定理6	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 1$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.7639$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.5853$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.4857$
定理8	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.5188$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.3970$	$q(\boldsymbol{A})\leqslant 0.3820$	

通过例1可以看出，本文给出的M-矩阵最小特征值的上界在一定程度上改进了以往的研究成果.

参考文献:

[1] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. 北京：人民邮电出版社，2005.

[2] VARGA R S. Matrix Iterative Analysis [M]. 2版. 北京：科学出版社，2006.

[3] SHIVAKUMAR P N, WILLIAMS J J, YE Q, et al. On Two-Side Bounds Related to Weakly Diagonally Dominant M-Matrices with Applications to Digital Circuit Dynamics [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1996, 17(2): 298－312.

[4] 逄明贤. 矩阵谱论 [M]. 长春：吉林大学出版社，1989.

[5] 章　伟，黄廷祝. 不可约M-矩阵最小特征值的估计 [J]. 工程数学学报，2004，21(8)：31－34.

[6] SCHWENK A J. Tight Bounds on the Spectral Radius of Asymmetric Nonnegative Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1986, 75(3): 257－265.

[7] KOLOTILINA L Y. Lower Bounds for the Perron Root of a Nonnegative Matrix [J]. Linear Algebra Appl, 1993, 180(93): 133－151.

[8] SZYLD D B. A Sequence of Lower Bounds for the Spectral Radius of Nonnegative Matrices [J]. Linear Algebra Appl, 1992, 174: 239－242.

[9] 钟　琴，赵春燕，王　妍，等. M-矩阵最小特征值的上界估计 [J]. 数学的实践与认识，2017，47(20)：216－219.

[10] 孙德淑. 非负矩阵Hadamard积的谱半径上界和M-矩阵Fan积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：7－11.

Sequences of Upper Bounds for Minimum Eigenvalue of M-Matrix

ZHONG Qin, ZHAO Chun-yan, WANG Yan, ZHOU Xin

Department of Mathematics, Sichuan University Jinjiang College, Pengshan Sichuan 620860, China

Abstract: Estimation the bounds for the minimum eigenvalue of M-matrix is important part in the theory of matrices. It is more practical value when the bounds are expressed easily calculated function in element of matrix. New bounds for the minimum eigenvalue of M-matrix were obtained by constructing three convergent sequences. The method can easily and tightly get the better bounds. Numerical example is given to illustrate the effectiveness by comparing with the relevant conclusions.

Key words: M-matrix; minimum eigenvalue; upper bounds; nonnegative matrix; spectral radius

责任编辑　廖　坤