

带变量核的分数次积分交换子 在变指数 Herz-Morrey 空间上的有界性^①

赵 欢, 周 疆

新疆大学 数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046

摘要: 证明了带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega, \mu}$ 与 Lipschitz 函数 b 生成的高阶交换子 $[b^m, T_{\Omega, \mu}]$ 在变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性.

关键词: 变量核; 分数次积分算子; Lipschitz 函数; 交换子; 变指数 Herz-Morrey 空间

中图分类号: O174.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)06-0011-06

设 S^{n-1} ($n \geq 2$) 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, $d\sigma$ 是 S^{n-1} 上规范的 Lebesgue 测度, 如果 $\Omega(x, z)$ 满足

(i) 对 $\forall x, z \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\lambda > 0$, 有 $\Omega(x, \lambda z) = \Omega(x, z)$;

(ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x, z') d\sigma(z') = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $\|\Omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, z')|^r d\sigma(z') \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$.

则定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的核函数 $\Omega(x, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$ ($r \geq 1$), 其中 $z' = \frac{z}{|z|}$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. 对于 $0 < \mu < n$, $\Omega(x, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$, 带变量核的分数次积分算子定义为

$$T_{\Omega, \mu} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x, x-y)}{|x-y|^{n-\mu}} f(y) dy$$

关于带变量核的奇异积分算子的有界性, 首先见文献[1]的工作. 随后, 带变量核的分数次积分算子的经典结论受到了众多学者的关注. 文献[2]证明了 $T_{\Omega, \mu}$ 是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的算子.

自文献[3]研究了变指数 Lebesgue 空间和 Sobolev 空间以来, 变指数空间理论由于在流体动力学及具有非增长条件的微分方程等领域有着广泛的应用, 近 20 年来得到了飞速的发展. 例如, 文献[4]考虑了调和分析中许多经典算子在变指数 Lebesgue 空间上的有界性; 文献[5]考虑了分数次积分算子在变指数 Herz-Morrey 空间 $M\dot{K}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性, 其中 $p(\cdot)$ 是变指数.

算子的有界性和函数空间的刻画是调和分析的两个重要内容, 交换子可以对函数空间进行刻画, 因此研究交换子是非常有意义的. 设 $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 定义由 b 和 $T_{\Omega, \mu}$ 生成的高阶交换子为

$$[b^m, T_{\Omega, \mu}] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x, x-y)}{|x-y|^{n-\mu}} (b(x) - b(y))^m f(y) dy \quad m \in \mathbb{N}$$

文献[6]证明了带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega, \mu}$ 及其交换子在变指数 Herz 空间 $M\dot{K}_{p(\cdot)}^{a, q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界

① 收稿日期: 2017-09-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11661075).

作者简介: 赵 欢(1994-), 女, 硕士研究生, 主要从事调和分析的研究.

通信作者: 周 疆, 教授.

性. 同年, 文献[7] 证明了算子 $T_{\Omega, \mu}$ 在变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性.

受以上结论的启发, 本文研究带变量核的分数次积分算子 $T_{\Omega, \mu}$ 与 Lipschitz 函数 b 生成的高阶交换子 $[b^m, T_{\Omega, \mu}]$ 在变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性. 在叙述主要结论之前, 首先回忆几个相关概念.

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测子集且 $|E| > 0$. 先介绍变指数 Lebesgue 空间的定义:

设 $p(\cdot): E \rightarrow [1, \infty)$ 是可测函数. 变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(E)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(E) = \left\{ f \text{ 是可测函数: 对于某个常数 } \eta > 0, \text{ 有 } \int_E \left(\frac{|f(x)|}{\eta} \right)^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

局部可积的变指数 Lebesgue 空间 $L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(E)$ 定义为

$$L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(E) := \{f \text{ 是可测函数: 对所有的紧子集 } K \subset E, f \in L^{p(\cdot)}(K)\}$$

当赋予如下的范数时:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)} = \inf \left\{ \eta > 0: \int_E \left(\frac{|f(x)|}{\eta} \right)^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

$L^{p(\cdot)}(E)$ 是 Banach 空间.

定义 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 是可测函数 $p(\cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ 的集合, 使得:

$$p^- = \text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) > 1 \quad p^+ = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) < \infty$$

用 $p'(\cdot)$ 表示 $p(\cdot)$ 的共轭指数, 即 $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. 设 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子. 用 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

表示 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 中所有使 M 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的函数 $p(\cdot)$ 组成的集合.

定义 1^[8] 设 $\Omega(x, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$, $\omega_r(\delta)$ 为它的 r 阶积分连续模, 如果

$$\int_0^1 \frac{\omega_r(\delta)}{\delta} d\delta < \infty$$

则称 $\Omega(x, z)$ 满足 L^r -Dini 条件, 其中 $\omega_r(\delta)$ 定义为

$$\omega_r(\delta) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\rho| < \delta} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, \rho z') - \Omega(x, z')|^r d\sigma(z') \right)^{\frac{1}{r}}$$

这里 ρ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的旋转, 且 $|\rho| = \sup_{z' \in S^{n-1}} |\rho z' - z'|$.

令 $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 2^k\}$, $A_k = B_k \setminus B_{k-1}$, $\chi_k = \chi_{A_k}$, $k \in \mathbb{Z}$, 其中 χ_{A_k} 表示集合 A_k 的特征函数.

定义 2^[5] 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < \infty$, $0 < q < \infty$, 且 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 变指数 Herz-Morrey 空间 $\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}): \|f\|_{\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$$

其中

$$\|f\|_{\dot{MK}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^L 2^{k\alpha q} \|f\chi_k\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

定义 3 对 $0 < \beta \leq 1$, Lipschitz 空间 $\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 是满足下面条件函数 b 的空间:

$$\|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y} \frac{|b(x) - b(y)|}{|x - y|^\beta} < \infty$$

在本文中, C 总表示和主要参数无关的一个正常数, 且其取值在不同的位置可以是不同的. $f \sim g$ 记为 $C^{-1}g \leq f \leq Cg$.

命题 1^[9] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足:

$$\begin{cases} |p(x) - p(y)| \leq \frac{-C}{\log(|x - y|)} & |x - y| \leq \frac{1}{2} \\ |p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log(e + |x|)} & |x| \leq |y| \end{cases}$$

则 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 即 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

引理 1^[9] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\forall f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq r_p \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

其中 $r_p = 1 + \frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+}$.

引理 2^[4] 设 $0 < \mu < n$, $r > 1$, $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$ 满足 L^r -Dini 条件. 若存在 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, 使得 $|y| < \alpha_0 R$, 则

$$\left\{ \int_{R < |x| < 2R} \left| \frac{\Omega(x, x-y)}{|x-y|^{\frac{n-\mu}{r}}} - \frac{\Omega(x, x)}{|x|^{\frac{n-\mu}{r}}} \right|^r dx \right\}^{\frac{1}{r}} \leq CR^{\left(\frac{n-\mu}{r} - n\right)} \left\{ \frac{|y|}{R} + \int_{\frac{|y|}{2R}}^{\frac{|y|}{K}} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta} d\delta \right\}$$

引理 3^[10] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 若 $q \in (p^+, \infty)$, 且定义 $\bar{q}(\cdot)$ 为 $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\bar{q}(x)}$ ($x \in \mathbb{R}^n$), 则对任意的可测函数 f 和 g , 有

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{\bar{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

引理 4^[11] 若 $p_1(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在正常数 δ_1, δ_2 和 C , 使得对所有 $\mathbb{R}^n$ 中的球 B 和所有的可测子集 $S \subset B$, 有:

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \left(\frac{|S|}{|B|} \right)^{\delta_1} \quad \frac{\|\chi_S\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq C \left(\frac{|S|}{|B|} \right)^{\delta_2}$$

引理 5 若 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在正常数 C , 使得对所有 $\mathbb{R}^n$ 中的球 B , 有

$$\frac{1}{|B|} \|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C$$

定理 1 设 $0 < \mu < n$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $\lambda + (\mu + m\beta) - n\delta_2 < \alpha < n\delta_1$. 令 $b \in \text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})$ ($r > p_2^+$), 且对于 $0 < c \leq 1$, 积分连续模 $\omega_r(\delta)$ 满足

$$\int_0^1 \frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+c}} d\delta < \infty$$

若 $p_1(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $0 < \mu + m\beta \leq \frac{n}{(p_1)^+}$, 且定义 $p_2(\cdot)$ 为 $\frac{1}{p_1(x)} - \frac{1}{p_2(x)} = \frac{\mu + m\beta}{n}$. 则存在正常数 C , 使得

$$\|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f)\|_{\dot{MK}_{q_2, p_2(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \|f\|_{\dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

证 对 $\forall f \in \dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)$, 定义 $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x)\chi_j(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x)$. 由 $0 < \frac{q_1}{q_2} \leq 1$, 利用不等式 $(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|)^{\frac{q_1}{q_2}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{\frac{q_1}{q_2}}$, 得

$$\begin{aligned} \|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f)\|_{\dot{MK}_{q_2, p_2(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} &\leq \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \left(\sum_{k=-\infty}^L 2^{kaq_1} \|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right) \\ &\leq \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L 2^{kaq_1} \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} \|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=k-1}^{k+1} \|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{kaq_1} \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} \|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)\chi_k\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right) \right) = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

首先估计 I_2 . 因为 $[b^m, T_{\Omega, \mu}]$ 是从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 则

$$I_2 \leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \|f\|_{\dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}$$

对于 I_1 , 注意到: 当 $x \in A_k$, $j \leq k-2$ 以及 $y \in A_j$ 时, 有 $|x-y| \sim |x|$. 利用 $\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 的定义, 可

推出

$$\begin{aligned} | [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)(x) | &\leq \int_{A_j} \frac{|\Omega(x, x-y)|}{|x-y|^{n-\mu}} |b(x) - b(y)|^m |f_j(y)| dy \leq \\ &C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \int_{A_j} \frac{|\Omega(x, x-y)|}{|x-y|^{n-(\mu+m\beta)}} |f_j(y)| dy \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \| [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j) \chi_k \|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} &\leq \\ C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \int_{A_j} |f_j(y)| &\left\| \left| \frac{\Omega(\cdot, \cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-(\mu+m\beta)}} - \frac{\Omega(\cdot, \cdot)}{|\cdot|^{n-(\mu+m\beta)}} \right| \chi_k \right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} dy \end{aligned}$$

因为 $r > p_2^+$, 所以可定义变指数 $\widetilde{p}_2(\cdot)$ 为 $\frac{1}{\widetilde{p}_2(\cdot)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\widetilde{p}_2(\cdot)}$. 结合引理 3, 得

$$\begin{aligned} &\left\| \left| \frac{\Omega(\cdot, \cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-(\mu+m\beta)}} - \frac{\Omega(\cdot, \cdot)}{|\cdot|^{n-(\mu+m\beta)}} \right| \chi_k \right\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\left\| \frac{\Omega(\cdot, \cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-(\mu+m\beta)}} - \frac{\Omega(\cdot, \cdot)}{|\cdot|^{n-(\mu+m\beta)}} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{\widetilde{p}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

根据文献[12]中的推论 4.5.9 以及 $\frac{1}{\widetilde{p}_2(\cdot)} = \frac{1}{p_2(\cdot)} - \frac{1}{r}$, 有

$$\|\chi_{B_k}\|_{L^{\widetilde{p}_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{\frac{-1}{r}} \approx \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_k|^{\frac{-1}{r} - \frac{n+m\beta}{n}}$$

另一方面, 使用引理 2 可得

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\Omega(\cdot, \cdot - y)}{|\cdot - y|^{n-(\mu+m\beta)}} - \frac{\Omega(\cdot, \cdot)}{|\cdot|^{n-(\mu+m\beta)}} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &C 2^{(k-1)(\frac{n}{r} - n + \mu + m\beta)} \left(\frac{|y|}{2^{k-1}} + \int_{\frac{|y|}{2^k}}^{\frac{|y|}{2^{k-1}}} \frac{\omega_r(\delta)}{\delta} d\delta \right) \leq \\ &C 2^{(k-1)(\frac{n}{r} - n + \mu + m\beta)} 2^{(j-k)c} \left(1 + \int_0^1 \frac{\omega_r(\delta)}{\delta^{1+c}} d\delta \right) \leq \\ &C 2^{(k-1)(\frac{n}{r} - n + \mu + m\beta)} \end{aligned}$$

因此有

$$\| [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j) \chi_k \|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-kn} \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \int_{B_j} f_j(y) dy \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

再根据引理 4、引理 5 和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} &\| [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j) \chi_k \|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &C 2^{-kn} \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \|\chi_{B_k}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{-1} \leq \\ &C 2^{(j-k)n\delta_1} \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{k\alpha} 2^{(j-k)n\delta_1} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{q_1} \leq \\ &C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{ja} 2^{(j-k)(n\delta_1 - \alpha)} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \right)^{q_1} \end{aligned}$$

下面对 $0 < q_1 < \infty$ 分 2 种情况讨论.

当 $0 < q_1 \leq 1$ 时, 根据已知条件 $\alpha < n\delta_1$ 可得

$$I_1 \leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jaq_1} 2^{(j-k)(n\delta_1 - \alpha)q_1} \|f_j\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \leq$$

$$\begin{aligned}
C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{j=-\infty}^L 2^{jaq_1} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{(j-k)(n\delta_1-a)q_1} \leq \\
C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{j=-\infty}^L 2^{jaq_1} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \leq \\
C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \| f \|_{\dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}
\end{aligned}$$

当 $1 < q_1 < \infty$ 时, 根据已知条件 $\alpha < n\delta_1$ 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jaq_1} 2^{\frac{(j-k)(n\delta_1-a)q_1}{2}} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right) \times \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{\frac{(j-k)(n\delta_1-a)q_1'}{2}} \right)^{\frac{q_1}{q_1'}} \leq \\
&C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L \sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{jaq_1} 2^{\frac{(j-k)(n\delta_1-a)q_1}{2}} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \leq \\
&C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{j=-\infty}^L 2^{jaq_1} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \sum_{k=j+2}^{\infty} 2^{\frac{(j-k)(n\delta_1-a)q_1}{2}} \leq \\
&C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{j=-\infty}^L 2^{jaq_1} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \leq \\
&C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \| f \|_{\dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}^{q_1}
\end{aligned}$$

现在估计 I_3 . 当 $x \in A_k$, $j \geq k+2$ 以及 $y \in A_j$ 时, 有 $|x-y| \sim |y|$. 类似于 I_1 的估计方法, 有

$$| [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)(x) | \leq C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \int_{A_j} \left| \frac{|\Omega(x, x-y)|}{|x-y|^{n-(\mu+m\beta)}} f_j(y) \right| dy$$

定义变指数 $\widetilde{p}'_1(\cdot)$ 为 $\frac{1}{\widetilde{p}'_1(\cdot)} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\widetilde{p}'_1(\cdot)}$, 由引理 3 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{A_j} \left| \frac{|\Omega(x, x-y)|}{|x-y|^{n-(\mu+m\beta)}} f_j(y) \right| dy \leq \\
&\| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \Omega(\cdot, \cdot - y) \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{\chi_j}{|\cdot - y|^{n-(\mu+m\beta)}} \right\|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma} \leq \\
&C 2^{-j(n-(\mu+m\beta))} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma} \left[\int_{2^{j-2}}^{2^j} r^{n-1} \left(\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, y')|^r d\sigma(y') \right) dr \right]^{\frac{1}{r}} \leq \\
&C 2^{-j(n-(\mu+m\beta))} 2^{\frac{in}{r}} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma} \| \Omega \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^r(S^{n-1})} \leq \\
&C 2^{-j(n-(\mu+m\beta))} 2^{\frac{in}{r}} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma}
\end{aligned}$$

运用文献[12]中的推论 4.5.9 和 $\frac{1}{\widetilde{p}_1(\cdot)} = \frac{1}{p_1(\cdot)} - \frac{1}{r}$ 可得 $\| \chi_{B_j} \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{\gamma} \sim \| \chi_{B_j} \|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} |B_j|^{\frac{1}{r}}$. 从而

$$| [b^m, T_{\Omega, \mu}](f_j)(x) | \leq C 2^{-j(n-(\mu+m\beta))} \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \| \chi_{B_j} \|_{L^{p'_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$$

类似于 I_1 的估计方法, 由条件 $\alpha > \mu + m\beta + \lambda - n\delta_2$, $\| \chi_{B_k} \|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-k(\mu+m\beta)} \| \chi_{B_k} \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ (见文献[12]), 有

$$I_3 \leq C \| b \|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-L\lambda q_1} \sum_{k=-\infty}^L 2^{kaq_1} \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{(j-k)(\mu+m\beta-n\delta_2)} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right)^{q_1}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = 2^{-ja} (2^{jaq_1} \| f_j \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)})^{\frac{1}{q_1}} \leq \\
&2^{-ja} \left(\sum_{i=-\infty}^j 2^{iaq_1} \| f_i \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} = \\
&2^{j(\lambda-a)} \left(2^{-j\lambda} \left(\sum_{i=-\infty}^j 2^{iaq_1} \| f_i \|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right) \leq \\
&C 2^{j(\lambda-a)} \| f \|_{\dot{MK}_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

所以通过以上的估计, 得

$$I_3 \leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \|f\|_{MK_{q_1, p_1(\cdot)}^{q_1, \lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-Lq_1} \sum_{k=-\infty}^L 2^{kq_1} \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{(j-k)(\mu+m\beta-n\beta_2+\lambda-\alpha)} \right)^{q_1} \leq$$

$$C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \|f\|_{MK_{q_1, p_1(\cdot)}^{q_1, \lambda}(\mathbb{R}^n)} \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-Lq_1} \left(\sum_{k=-\infty}^L 2^{kq_1} \right) \leq$$

$$C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^{mq_1} \|f\|_{MK_{q_1, p_1(\cdot)}^{q_1, \lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

综合 I_1, I_2 和 I_3 的估计, 得

$$\|[b^m, T_{\Omega, \mu}](f)\|_{MK_{q_2, p_2(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta(\mathbb{R}^n)}^m \|f\|_{MK_{q_1, p_1(\cdot)}^{a, \lambda}(\mathbb{R}^n)}$$

参考文献:

- [1] CALDERÓN A P, ZYGMUND A. On Singular Integral with Variable Kernels [J]. *Applicable Analysis*, 1978, 7(7): 221—238.
- [2] MUCKENHOUT B, WHEEDEN R L. Weighted Norm Inequalities for Singular and Fractional Integrals [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1971, 161: 249—258.
- [3] KOVÁČIK O, RÁKOSNÍK J. On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k, p(x)}$ [J]. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1991, 41(4): 592—618.
- [4] CRUZ-URIBE D, FIORENZA A, MARTELL J M, et al. The Boundedness of Classical Operators on Variable L^p Spaces [J]. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 2006, 31(1): 239—264.
- [5] IZUKI M. Fractional Integrals on Herz-Morrey Spaces with Variable Exponent [J]. *Hiroshima Mathematical Journal*, 2010, 40(3): 343—355.
- [6] ABDALMONEM A, ABDALRHMAN O, TAO S P. Boundedness of Fractional Integral with Variable Kernel and Their Commutators on Variable Exponent Herz Spaces [J]. *Applied Mathematics*, 2016, 7(10): 1165—1182.
- [7] ABDALMONEM A, ABDALRHMAN O, TAO S P. The Boundedness of Fractional Integral with Variable Kernel on Variable Exponent Herz-Morrey Spaces [J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, 4(4): 787—795.
- [8] 丁 勇, 陈杰诚, 范大山. Hardy 空间上一类带可变核的积分算子 [J]. *数学年刊 A 辑(中文版)*, 2002, 23(3): 289—296.
- [9] NEKVINDA A. Hardy-Littlewood Maximal Operator on $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$ [J]. *Mathematical Inequalities Applications*, 2004, 7(2): 255—265.
- [10] DIENING L, HARJULEHTO P, HÄSTÖ P, et al. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents* [M]. Berlin: Springer, 2011.
- [11] KARLOVICH A Y, LERNER A K. Commutators of Singular Integral on Generalized L^p Spaces with Variable Exponent [J]. *Publicacions Matemàtiques*, 2005, 49(1): 111—125.

Boundedness for Commutators of Fractional Integral with Variable Kernel on Variable Exponent Herz-Morrey Spaces

ZHAO Huan, ZHOU Jiang

College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China

Abstract: In this paper, it has been proved that the boundedness of the higher order commutators $[b^m, T_{\Omega, \mu}]$ generated by the fractional integral operators $T_{\Omega, \mu}$ with variable kernel and Lipschitz function b in variable exponent Herz-Morrey spaces $M\dot{K}_{q, p(\cdot)}^{a, \lambda}$.

Key words: variable kernel; fractional integral operator; Lipschitz function; commutator; variable exponent Herz-Morrey space