第 43 卷 第 6 期　　西南师范大学学报（自然科学版）　　2018 年 6 月
Vol. 43 No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2018

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2018.06.005

一类区域分数阶 Schrödinger 方程的基态解①

王德菊，　唐春雷，　吴行平

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：用变分方法研究了区域分数阶 Schrödinger 方程

$$(-\Delta)_\rho^\alpha u + V(x)u = f(x,\ u) \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$$

获得了该方程基态解的存在性.

关　键　词：变分方法；山路定理；基态解

中图分类号：O176.3　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2018)06－0021－06

考虑下面的分数阶 Schrödinger 方程：

$$(-\Delta)_\rho^\alpha u + V(x)u = f(x,\ u) \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N) \tag{1}$$

其中 $\alpha \in (0,\ 1)$，$N > 2\alpha$，$2_\alpha^* = \dfrac{2N}{N-2\alpha}$ 为分数阶临界指数. $(-\Delta)_\rho^\alpha$ 为区域分数阶 Laplace 算子，定义如下：

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)_\rho^\alpha u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\ \rho(x))} \frac{[u(x+z)-u(x)][v(x+z)-v(x)]}{|z|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad u,v \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$$

算子 $(-\Delta)_\rho^\alpha$ 的一些性质可见文献[1－3].

近些年来，分数阶 Schrödinger 方程被越来越多的学者研究（见文献[4－9]）. 有许多文章研究以下的分数阶 Schrödinger 方程，即

$$(-\Delta)^\alpha u + V(x)u = f(x,\ u) \qquad u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N) \tag{2}$$

当 f 满足(AR)条件，且方程(2)中的 $V \equiv 1$ 时，文献[6]用山路定理得到了方程(2)的正解. 当 $f(x,\ u) = |u|^{p-1}u$ 时，文献[7]利用 Nehari 流形方法证明了方程(2)基态解的存在性，并考虑了具有固定频率的束缚态解的存在性. 当 f 满足单调性条件，且方程(2)中的 $V \equiv 0$ 时，文献[8]证明了方程(2)非平凡解的存在性. 据我们所知，很少有文章研究方程(1)解的存在性. 值得一提的是，文献[5]证明了当 f 满足单调性条件时方程(1)存在基态解. 受以上结论的启发，本文对 V 和 f 作出下面的假设：

(P) $\rho \in C(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{R}_+)$，存在 $\rho_0 > 0$，使得 $\rho(x) \geqslant \rho_0$；

(V) $V \in C(\mathbb{R}^N,\ \mathbb{R})$，$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) \geqslant C > 0$，存在 $r_0 > 0$，使得对 $\forall M > 0$，有

$$\lim_{|y|\to\infty} \mathrm{meas}(\{x \in \mathbb{R}^N:\ |x-y| \leqslant r_0,\ V(x) \leqslant M\}) = 0$$

(f_1) $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\ \mathbb{R})$ 且 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,\ t)}{t} = 0$，关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(x,\ t)}{t^{2_\alpha^*-1}} = 0$，关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立；

(f_3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{F(x,\ t)}{t^2} = +\infty$，关于 $x \in \mathbb{R}^N$ 一致成立，其中 $F(x,\ t) = \int_0^t f(x,\ \tau)\mathrm{d}\tau$；

① 收稿日期：2018－02－06

基金项目：国家自然科学基金项目(11471267).

作者简介：王德菊(1992－)，女，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：吴行平，教授.

(f_4) 令 $\mathscr{F}(x,t)=tf(x,t)-2F(x,t)$，存在 $\theta\geqslant 1$，使得对 $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$，$s\in[0,1]$，都有 $\theta\mathscr{F}(x,t)\geqslant\mathscr{F}(x,st)$.

本文主要的结果是:

定理 1 假设条件(P),(V),(f_1)－(f_4) 成立，那么方程(1) 存在非平凡基态解.

注 1 设

$$f(x,t)=\begin{cases}2t\ln(1+t^2)+3\sin^2 t\cos t & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}$$

则

$$\mathscr{F}(x,t)=2(t^2-\ln(1+t^2))+3t\sin^2 t\cos t-2\sin^3 t \qquad t>0$$

取 $\theta=1\ 000$，通过计算不难验证 $\mathscr{F}$ 满足条件(f_1)－(f_4) 但不满足单调性条件，所以本文的定理 1 推广了文献[5] 的定理 1.2.

首先介绍分数阶 Sobolev 空间[4]

$$H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\}$$

其范数为

$$\|u\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

记函数空间 $E\subseteq H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 定义为

$$E=\left\{u\in L^2(\mathbb{R}^N):\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\rho(x))}\frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

其内积为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\rho(x))}\frac{(u(x+z)-u(x))(v(x+z)-v(x))}{|z|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)uv\mathrm{d}x$$

相应的范数为

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\rho(x))}\frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

则$(E,\|\cdot\|)$为希尔伯特空间，且 $E\hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 是连续的.

方程(1) 的能量泛函是

$$\begin{aligned}\Phi(u)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{B(0,\rho(x))}\frac{|u(x+z)-u(x)|^2}{|z|^{N+2\alpha}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,u)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3}$$

Φ 的 Fréchet 导数是

$$\langle\Phi'(u),v\rangle=\langle u,v\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u)v\,\mathrm{d}x \qquad v\in E \tag{4}$$

由临界点理论知，Φ 的临界点就是方程(1) 的弱解.

定理 1 的证明

步骤 1 证明 Φ 满足$(\mathrm{Ce})_c$ 条件.

令$\{u_n\}\subset E$ 是$(\mathrm{Ce})_c$ 序列，即:

$$\Phi(u_n)\to c \qquad (1+\|u_n\|)\|\Phi'(u_n)\|\to 0 \qquad n\to+\infty \tag{5}$$

首先证明$\{u_n\}\subset E$有界，用反证法. 假设 $\|u_n\|\to+\infty$，令 $w_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. 那么 $\|w_n\|=1$，则$\{w_n\}$有界，取$\{w_n\}$ 的子列，仍记作$\{w_n\}$. 由文献[5] 的引理 2.3 知，存在 $w\in E$，使得在 E 中 $w_n\rightharpoonup w$；在 $L^q(\mathbb{R}^N)(2\leqslant q<2_{\alpha}^{*})$ 中 $w_n\to w$；在 $\mathbb{R}^N$ 中 $w_n(x)\to w(x)$ 几乎处处成立. 下面断言 $w\neq 0$. 若 $w=0$，则在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中 $w_n\to 0$. 定义一列实数$\{t_n\}$，满足

$$\Phi(t_nu_n)=\max_{t\in[0,1]}\Phi(tu_n) \tag{6}$$

如果对于某个自然数 n，存在多个 t_n 满足(6)式，只取其中1个．由于 $\Phi(0)=0$ 及 $\Phi(u_n)\to c$，故对 $t_n\in(0,1)$，可得

$$\langle\Phi'(t_nu_n),t_nu_n\rangle=\|t_nu_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}f(x,t_nu_n)t_nu_n\,\mathrm{d}x=t_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(tu_n)\big|_{t=t_n}=0 \tag{7}$$

当 $t_n=0$ 时，有

$$\langle\Phi'(t_nu_n),t_nu_n\rangle=0 \tag{8}$$

当 $t_n=1$ 时，由(5)式得

$$\langle\Phi'(t_nu_n),t_nu_n\rangle=\langle\Phi'(u_n),u_n\rangle\to 0 \tag{9}$$

因此，由(7)－(9)式，存在 $t_n\in[0,1]$，使得

$$\langle\Phi'(t_nu_n),t_nu_n\rangle\to 0 \tag{10}$$

由条件(f_1),(f_2)知，对 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$，有

$$f(x,t)\leqslant\delta(\varepsilon)|t|+\varepsilon|t|^{2_\alpha^*-1} \tag{11}$$

故

$$F(x,t)\leqslant\frac{\delta(\varepsilon)}{2}|t|^2+\frac{\varepsilon}{2_\alpha^*}|t|^{2_\alpha^*} \tag{12}$$

令 $v_n=2\sqrt{k}w_n$，其中 $k>0$，那么在 $L^2(\mathbb{R}^N)$ 中 $v_n\to 0$，并且 v_n 在 E 中有界，因此由(12)式得

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F(x,v_n)\mathrm{d}x\leqslant\limsup_{n\to+\infty}\left(\frac{\delta(\varepsilon)}{2}\|v_n\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2_\alpha^*}\|v_n\|_{2_\alpha^*}^{2_\alpha^*}\right)\leqslant\frac{\varepsilon}{2_\alpha^*}C_0(2\sqrt{k})^{2_\alpha^*}$$

其中 $C_0>0$．由 ε 的任意性知

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}F(x,v_n)\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{13}$$

当 n 足够大时，$\dfrac{2\sqrt{k}}{\|u_n\|}\in(0,1)$，结合(6)式和(13)式，得

$$\Phi(t_nu_n)\geqslant\Phi(v_n)=2k-\int_{\mathbb{R}^N}F(x,v_n)\mathrm{d}x\geqslant k$$

由 k 的任意性，有

$$\Phi(t_nu_n)\to+\infty \tag{14}$$

由条件(f_4)、(5)式与(10)式，可得

$$\begin{aligned}\Phi(t_nu_n)=&\Phi(t_nu_n)-\frac{1}{2}\langle\Phi'(t_nu_n),t_nu_n\rangle+o(1)=\\&\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}f(x,t_nu_n)t_nu_n-F(x,t_nu_n)\right)\mathrm{d}x+o(1)\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}\theta\left(\frac{1}{2}u_nf(x,u_n)-F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x+o(1)\leqslant\\&\theta\left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2+o(1)+c-\frac{1}{2}\|u_n\|^2\right)+o(1)\leqslant\\&\theta c+o(1)\end{aligned}$$

与(14)式矛盾，故 $w\neq 0$．令：

$$\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}^N:w(x)=0\}$$
$$\Omega_2=\{x\in\mathbb{R}^N:w(x)\neq 0\}$$

由条件(f_3)和 Fatou 引理知

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^2}\mathrm{d}x=&\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x\geqslant\\&\int_{\Omega_2}\liminf_{n\to\infty}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x\to+\infty\end{aligned} \tag{15}$$

由条件(f_4)可得，当 $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ 时

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F(x,t)}{t^2}\right)=\frac{G(x,t)}{t^3}\geqslant 0$$

故$\frac{F(x,t)}{t^2}$单调递增，即 $F(x,t)\geqslant 0$. 将(3)式两边除以 $\|u_n\|^2$，结合(15)式，可得

$$\begin{aligned}o_n(1)=&\frac{\Phi(u_n)}{\|u_n\|^2}=\\&\frac{1}{2}-\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{2}-\left(\int_{\Omega_1}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega_2}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x\right)\leqslant\\&\frac{1}{2}-\int_{\Omega_2}\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}w_n^2\mathrm{d}x\to-\infty\end{aligned}$$

矛盾，因此$\{u_n\}$在 E 中有界.

接下来证明在 E 中 $u_n\to u$. 由于$\{u_n\}$有界，故存在 $m>0$ 使得 $\|u_n\|\leqslant m$. 由文献[5]的引理2.3知，存在$\{u_n\}$的子列(仍记作$\{u_n\}$)和 $u\in E$，使得在 E 中 $u_n\rightharpoonup u$；在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to u$；且在 $\mathbb{R}^N$ 中$u_n(x)\to u(x)$几乎处处成立. 故存在 $C_3>0$，使得 $\|u_n-u\|_{2_\alpha^*}\leqslant C_3$ 且：

$$\langle\Phi'(u_n),u_n-u\rangle\to 0\qquad\langle\Phi'(u),u_n-u\rangle\to 0$$

则

$$\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u\rangle=\|u_n-u\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0\tag{16}$$

由(11)式和 Hölder 不等式，有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leqslant&\int_{\mathbb{R}^N}|f(x,u_n)||u_n-u|\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_{\mathbb{R}^N}(\delta(\varepsilon)|u_n||u_n-u|+\varepsilon|u_n|^{2_\alpha^*-1}|u_n-u|)\mathrm{d}x\leqslant\\&\delta(\varepsilon)\|u_n\|_2\|u_n-u\|_2+\varepsilon\|u_n\|_{2_\alpha^*}^{2_\alpha^*-1}\|u_n-u\|_{2_\alpha^*}\leqslant\\&\delta(\varepsilon)Km\|u_n-u\|_2+\varepsilon K^{2_\alpha^*-1}m^{2_\alpha^*-1}C_3\end{aligned}$$

由于在 $L^q(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to u$，故

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(x,u_n)(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))(u_n-u)\mathrm{d}x\to 0$$

结合(16)式知 $\|u_n-u\|^2\to 0$，即 $u_n\to u(n\to+\infty)$.

综上所述，Φ 满足$(\mathrm{Ce})_c$条件.

步骤2　证明泛函 Φ 满足山路结构.

由条件(f_1)和(f_2)，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对 $\forall(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ 有

$$F(x,t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|t|^2+\frac{\delta(\varepsilon)}{2_\alpha^*}|t|^{2_\alpha^*}$$

令 $0<\varepsilon<\frac{1}{2C_4}$，其中 $C_4>0$. 对 $u\in E$，有

$$\begin{aligned}\Phi(u)\geqslant&\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_2^2+\frac{\delta(\varepsilon)}{2_\alpha^*}\|u\|_{2_\alpha^*}^{2_\alpha^*}\geqslant\\&\frac{1}{2}\|u\|^2-C_4\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2-C_5\frac{\delta(\varepsilon)}{2_\alpha^*}\|u\|^{2_\alpha^*}\geqslant\\&\left(\frac{1}{4}-\frac{C_5\delta(\varepsilon)}{2_\alpha^*}\|u\|^{2_\alpha^*-2}\right)\|u\|^2\geqslant\end{aligned}$$

$$\frac{1}{8}r^2 > 0$$

其中 $\|u\| = r$，$r = \left(\frac{2_\alpha^*}{8C_5\delta(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2_\alpha^*-2}}$. 对 $t>0$，$u\in E$，有

$$\Phi(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, tu)\mathrm{d}x$$

由条件(f_3)知，当 $t\to+\infty$ 时，$\Phi(tu)\to-\infty$. 令 $\|e\| = \|tu\| > r$，有 $\Phi(e)<0$. 因此 Φ 满足山路结构.

由步骤 1 和步骤 2 的证明以及山路定理可得 Φ 的一个非平凡临界点 u_0，且

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in(0,1)}\Phi(\gamma(t)) = \Phi(u_0) \geqslant \frac{1}{8}r^2 > 0$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma\in C([0,1], E): \gamma(0)=0, \gamma(1)=e\}$$

令

$$\mathscr{B} = \{u\in E: u\neq 0, \langle\Phi'(u), v\rangle = 0\} \qquad \forall v\in E$$

为 Φ 的解空间，$u_0\in\mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$ 非空.

步骤 3　证明 Φ 在 $\mathscr{B}$ 上下方有界.

在条件(f_4)中当 $s=0$ 时，对所有$(x, t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ 有 $tf(x,t)\geqslant F(x,t)$ 成立，故对 $\forall u\in\mathscr{B}$，有

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)u\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

因此要证 Φ 在 $\mathscr{B}$ 上下方有界，即证存在 $d>0$，使得对 $\forall u\in\mathscr{B}$，$\Phi(u)>d$. 用反证法，如果不成立，那么存在$\{u_n\}\subset\mathscr{B}$，使得 $\Phi(u_n)<\frac{1}{n}(\forall n\in\mathbb{N}_+)$. 由条件($\mathrm{f}_1$)和($\mathrm{f}_2$)知，对 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得对 $\forall(x, t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$，有

$$f(x, t)t \leqslant \varepsilon|t| + C_\varepsilon|t|^{2_\alpha^*} \tag{17}$$

由(17)式和文献[5]的引理 2.2，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n} > \Phi(u_n) \geqslant \\ &\quad \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\varepsilon}{2}|u|^2\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{C_\varepsilon}{2_\alpha^*}|u|^{2_\alpha^*}\mathrm{d}x \geqslant \\ &\quad \frac{1}{2}(1-\varepsilon K^2)\|u_n\|^2 - \frac{C_\varepsilon K^{2_\alpha^*}}{2_\alpha^*}\|u_n\|^{2_\alpha^*}\end{aligned} \tag{18}$$

因为$\{u_n\}\subset\mathscr{B}$，所以$\langle\Phi'(u_n), u_n\rangle = 0$. 由(17)式得

$$\|u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon K^2\|u_n\|^2 + C_\varepsilon K^{2_\alpha^*}\|u_n\|^{2_\alpha^*} \tag{19}$$

不妨令 $0<\varepsilon<\frac{1}{2K^2}$，那么由(18)式和(19)式得

$$\frac{1}{n} > \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2_\alpha^*}\right)(1-\varepsilon K^2)\|u_n\|^2 > \left(1-\frac{2}{2_\alpha^*}\right)\|u_n\|^2$$

由于 $2_\alpha^*>2$，因此 $\|u_n\|\to 0$. 由(19)式得

$$\|u_n\|^2 < \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + C_\varepsilon K^{2_\alpha^*}\|u_n\|^{2_\alpha^*}$$

因此 $\|u_n\| > \left(\frac{1}{2C_\varepsilon K^{2_\alpha^*}}\right)^{\frac{1}{2_\alpha^*-2}} > 0$，与 $\|u_n\|\to 0$ 矛盾. 故存在 $d>0$，使得

$$d = \inf_{u\in\mathscr{N}}\Phi(u)$$

则 $d\leqslant c$. 令$\{v_n\}\subset\mathscr{B}$ 是 $\Phi(u)$ 中的极小化序列，则$\{v_n\}$是$(\mathrm{Ce})_d$ 序列. 由第一步可得$\{v_n\}$在 E 中有界，且有收敛的子列(仍记作$\{v_n\}$)，在 E 中 $v_n\to u_1$. 由于 $u_1\in\mathscr{B}$，因此获得了方程(1)的非平凡基态解.

参考文献:

[1] GUAN Q Y, MA Z M. Reflected Symmetric α-Stable Processes and Regional Fractional Laplacian [J]. Probab Theory Related Fields, 2006, 134(4): 649-694.

[2] GUAN Q Y. Integration by Parts Formula for Regional Fractional Laplacian [J]. Comm Math Phys, 2006, 266(2): 289-329.

[3] FELMER P, TORRES C. Non-linear Schrödinger Equation with Non-Local Regional Diffusion [J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54(1): 75-98.

[4] NEZZA E D, PALATUCCI G, VALDINOCI E. Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces [J]. Bull Sci Math, 2011, 136(5): 521-573.

[5] PU Y, LIU J, TANG C L. Ground State Solutions for Non-Local Fractional Schrödinger Equations [J]. Electron J Differential Equations, 2015, 223: 1-16.

[6] FELMER P, QUAAS A, TAN J G. Positive Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation with the Fractional Laplacian [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, 2012, 142(6): 1237-1262.

[7] CHENG M. Bound State for the Fractional Schrödinger Equation with Unbounded Potential [J]. J Math Phys, 2012, 53(4): 298.

[8] GE B, ZHANG C. On the Superlinear Problems Involving the Fractional Laplacian [J]. Rev R Acad Cienc Exactas Fís Nat Ser A Math, 2016, 110(2): 343-355.

[9] 刘晓琪, 欧增奇. 一类 Kirchhoff 型分数阶 p-拉普拉斯方程无穷解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(4): 70-75.

Ground State Solutions for a Regional Fractional Schrodinger Equation

WANG De-ju, TANG Chun-lei, WU Xing-ping

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this article, the existence of nontrivial ground state solution for a time-independent regional fractional schrodinger equation

$$(-\Delta)_\rho^\alpha u + V(x)u = f(x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ u \in H^\alpha(\mathbb{R}^N)$$

has been obtained by using the variational method.

Key words: variational method; mountain pass theorem; ground state solution

责任编辑 廖 坤 崔玉洁