DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.06.006

关于迷向 log -凹函数的注记[①]

崔安艳, 王贺军

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 凸体的迷向位置是研究极值问题的重要位置. 研究了 log -凹函数的迷向位置,得到了 log -凹函数处于迷向位置的充要条件,其结果是凸体处于迷向位置充要条件的推广.

关 键 词: 迷向位置;凸体;log -凹函数

中图分类号: O186.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2018)06-0027-04

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中具有非空内点的紧致凸集称为凸体. S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面,$GL(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一般线性变换群,$SL(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的特殊线性变换群. 设 $T \in GL(n)$,T^t 表示线性变换 T 的转置.

有限维赋范空间的渐进理论研究的一个主要问题是确定空间 X 中单位球 K_X 的恰当位置,例如:迷向位置、John 位置、ℓ -位置、M -位置等[1-2].

设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中质心在原点且体积等于 1 的凸体,如果存在常数 $\alpha > 0$,使得对 $\forall\, T \in GL(n)$ 满足

$$\int_K \langle x, Tx \rangle \mathrm{d}x = \alpha^2 (\operatorname{tr} T) \tag{1}$$

则凸体 K 处于迷向位置. 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积.

文献[3]得到了凸体处于迷向位置的充要条件:

凸体 K 处于迷向位置当且仅当

$$\int_K |x|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_{TK} |x|^2 \mathrm{d}x \qquad \forall\, T \in SL(n) \tag{2}$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的标准范数[3].

近些年来,数学家们发现 log -凹函数与凸体间存在紧密联系,类似于凸体的 Brunn-Minkowski 理论,他们也得到了关于 log -凹函数的一些相应结果(参见文献[4-9]).

本文我们主要研究 log -凹函数的迷向位置,得到了 log -凹函数处于迷向位置的充要条件,它是凸体处于迷向位置充要条件(2)式的推广.

1 预备知识

本节将介绍关于 log -凹函数的一些基本概念和相关结论.

设 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ 是正的可积函数,函数 f 的重心定义为

$$\operatorname{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{d}x}$$

---

① 收稿日期:2017-07-15

作者简介:崔安艳(1992-),女,硕士研究生,主要从事积分几何与凸几何分析的研究.

特别地，如果

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\ \theta\rangle f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \theta \in S^{n-1}$$

则 f 的重心在原点.

如果函数 f 可以写成下列形式：

$$f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f = \mathrm{e}^{-u}$$

则函数 f 为 log-凹函数. 其中 $u:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 为凸函数.

例如 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 K 的特征函数 χ_K 为 log-凹函数，即

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases}$$

如果 log-凹函数 f 满足：

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x = 1$；

(b) f 的重心在原点；

(c) 对 $\forall\, T \in GL(n)$，有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\ Tx\rangle f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{tr}(T) \tag{3}$$

则函数 f 是迷向的[10].

2 主要结果

定理 1 设 f 是 log-凹函数，如果 $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant n$，则 f 是迷向的当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 (f\circ T)(x)\mathrm{d}x \qquad \forall\, T \in SL(n) \tag{4}$$

其中 $(f\circ T)(x)$ 表示 $f(Tx)$.

证 首先，假设 log-凹函数 f 是迷向的. 由迷向 log-凹函数的定义(3)式可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\mathrm{d}x = n \tag{5}$$

再设 $T \in SL(n)$，由几何算术平均不等式有 $\mathrm{tr}(T^tT) \geqslant n[\det(T^tT)]^{\frac{1}{n}}$，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 (f\circ T)(x)\mathrm{d}x = & \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(Tx)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |T^{-1}x|^2 f(x)\mathrm{d}x = \\ & \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\ (T^tT)^{-1}x\rangle f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{tr}((T^tT)^{-1}) \geqslant n \end{aligned} \tag{6}$$

由(5)式和(6)式可得(4)式.

反过来，假设不等式(4)成立. 设 $T \in GL(n)$，且 ε 是任意小的正数，令

$$T_\varepsilon = [\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{1}{n}}(I+\varepsilon T)^{-1} \in SL(n)$$

由(4)式得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant & \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 (f\circ T_\varepsilon)(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(T_\varepsilon x)\mathrm{d}x = \\ & \int_{\mathbb{R}^n} |T_\varepsilon^{-1}x|^2 f(x)\mathrm{d}x = [\det(I+\varepsilon T)]^{-\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} |(I+\varepsilon T)x|^2 f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$[\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{2}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |(I+\varepsilon T)x|^2 f(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

直接计算可得：

$$|(I+\varepsilon T)x|^2=|x|^2+2\varepsilon\langle x, Tx\rangle+O(\varepsilon^2) \tag{8}$$

$$[\det(I+\varepsilon T)]^{\frac{2}{n}}=1+2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}+O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

将(8)式与(9)式带入(7)式，且令 $\varepsilon\to 0^+$，可得

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\langle x, Tx\rangle f(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

由(10)式和题设条件$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant n$，可得

$$\mathrm{tr}(T)\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\langle x, Tx\rangle f(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

(11)式中我们用 $-T$ 代替 T 得到反向的不等式，故(11)式对 $\forall\, T\in GL(n)$ 取得等号．因此，f 是迷向的 log -凹 函数．

推论 1　设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体，则凸体 K 处于迷向位置当且仅当

$$\int_K|x|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{TK}|x|^2\mathrm{d}x\qquad\forall\, T\in SL(n) \tag{12}$$

证　取函数 f 为凸体 K 的特征函数 χ_K．

首先，若 f 是迷向的，则由迷向 log -凹函数的定义(3)式可得

$$\int_K\langle x, T x\rangle\mathrm{d}x=\mathrm{tr}(T)$$

取 T 为单位线性变换，则有

$$\int_K|x|^2\mathrm{d}x=n \tag{13}$$

由(6)式可得

$$\int_{TK}|x|^2\mathrm{d}x\geqslant n \tag{14}$$

由(13)式和(14)式可得(12)式．

反之，若(4)式成立，此即(12)式成立，则证明过程中相应地有

$$\frac{\mathrm{tr}(T)}{n}\int_K|x|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_K\langle x, Tx\rangle\mathrm{d}x \tag{15}$$

(15)式中用 $-T$ 代替 T，得到(15)式对 $\forall\, T\in GL(n)$ 取得等号．由凸体处于迷向位置的定义(1)式可知，此时凸体处于迷向位置．

注 1　根据定理 1 及其证明完全可以得到推论 1，故本文中定理 1 是凸体处于迷向位置充要条件((2)式)的推广．

参考文献：

[1] GIANNOPOULOS A A, MILMAN V D. Extremal Problems and Isotropic Positions of Convex Bodies [J]. Israel J Math, 2000, 117(1): 29－60.

[2] SCHNEIDER R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory [M]. 2th ed, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[3] MILMAN V, PAJOR A. Isotropic Position and Inertia Ellipsoids and Zonoids of the Unit Ball of a Normed n-Dimensional Space [M]. New York: Springer, 1989: 64－104.

[4] ARTSTEIN-AVIDAN S, KLARTAG B, MILMAN V. The Santaló Point of a Function, and a Functional form of Santaló Inequality [J]. Mathematika, 2004, 51(1－2): 33－48.

[5] ARTSTEIN-AVIDAN S, KLARTAG B, SCHÜTT C, et al. Functional Affine-Isoperimetry and an Inverse Logarithmic Sobolev Inequality [J]. J Funct Anal, 2012, 262(9): 4181－4204.

[6] ARTSTEIN-AVIDAN S, SLOMKA B. A Note on Santaló Inequality for the Polarity Transform and Its Reverse [J]. Proc Amer Math Soc, 2015, 143(4): 1693-1704.

[7] CAGLAR U, WERNER E M. Mixed f-Divergence and Inequalities for log Concave Functions [J]. Proc London Math Soc, 2015, 110(2): 271-290.

[8] KLARTAG B, MILMAN V D. Geometry of log-Concave Functions and Measures [J]. Geom Dedicata, 2005, 112(1): 169-182.

[9] ROTEM L. Support Functions and Mean Width for α-Concave Functions [J]. Adv Math, 2013, 243(11): 168-186.

[10] BRAZITIKOS S, GIANNOPOULOS A, VALETTAS P, et al. Geometry of Isotropic Convex Bodies [M]. New York: Ammer Math Soc, 2014: 196.

On Isotropy of Log-Concave Functions

CUI An-yan, WANG He-jun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The isotropic position is an important position in the study of extremal problems of convex body. In this paper, the isotropic position of log-concave functions has been studied, and the necessary and sufficient condition of log-concave function which is isotropic been obtained. It is an extension of the necessary and sufficient condition of convex body which is in isotropic position.

Key words: isotropic position; convex body; log-concave function

责任编辑 廖 坤