

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.06.009

一种新 Tikhonov 正则化方法^①

郭淑妹, 李 豪, 郭 杰

信息工程大学 基础部, 郑州 450001

摘要: 由矩阵变换得到一种新的 Tikhonov 正则化方法, 是截断奇异值法和 Tikhonov 正则化方法的结合. 通过 3 种正则化方法的滤波因子, 对 3 种方法进行概括. 并通过大地测量中的控制网平差、重力向下延拓的实例对 3 种方法进行比较, 得出新方法在减小解均方误差、提高未知数的精度等方面具有一定的有效性.

关 键 词: 病态性; 奇异值分解; Tikhonov 正则化; 滤波因子

中图分类号: P207; O241.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)06-0046-06

病态性问题广泛存在于大地测量中. 在某些控制网平差中由于法矩阵条件数很大, 法矩阵求逆会出现不稳定, 观测值微小的扰动会导致解的很大变化, 解不稳定是病态问题. 在航空重力向下延拓中会放大观测噪声, 且当数据点间隔小或延拓高度较大时, 观测方程是病态的. 解决病态性问题的基本思路是通过正则化方法将病态性问题转化为病态性相对较轻或良性问题^[1], 然后再进行解算. 近年来, 正则化方法越来越多用来解决大地测量中的病态性问题^[2-5]. 正则化方法有多种, 如 Tikhonov 正则化方法、截断奇异值法等. 正则化方法通过引入正则化参数来改善矩阵的病态性, 决定正则化估计的两个关键因素是正则化参数和正则化矩阵. 常见的正则化参数的选取方法有岭迹法^[6]、广义交叉验证法^[7]、L-曲线法^[8]. 由于矩阵的奇异值分解方法(SVD, Singular-Value Decomposition Method)理论比较成熟, 并且可以利用计算机技术进行大量的计算, 所以 SVD 方法备受青睐, 并且许多学者在大地测量领域做了大量的工作^[9-10], 提高了地球物理解释的质量和水平.

1 正则化方法

大地测量常用线性模型为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \Delta \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{L}$ 为 $n \times 1$ 观测向量, $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times l$ 设计矩阵, Δ 为误差向量, $\boldsymbol{X}$ 为 $l \times 1$ 未知参数向量, $\text{Rank}(\boldsymbol{A}) = l$. $E(\Delta) = 0$, $D(\boldsymbol{L}) = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}^{-1}$, σ_0^2 为未知的单位权方差, 最小二乘解为 $\hat{\boldsymbol{X}}_{LS} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{L}$.

当取权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为单位阵时, $\hat{\boldsymbol{X}}_{LS} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{L}$, 当方程病态时, 法矩阵 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$ 的最小特征根近似于 0, $(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1}$ 的元素会变得很大, 观测值微小的扰动会导致最小二乘解的很大变化, 即解不稳定.

病态性诊断的主要任务是分析设计矩阵的列向量之间是否存在复共线性和复共线性的严重程度. 判断方程是否病态和病态程度, 一般采用法矩阵条件数来衡量, 条件数度量了法矩阵的特征值分散程度, 可以用来度量复共线性的大小及诊断系统的病态性. 即 $\text{cond}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, 式中 $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$ 的最

① 收稿日期: 2018-03-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(41174005, 40974009).

作者简介: 郭淑妹(1981-), 女, 讲师, 主要从事统计测量处理工作的研究.

大、最小特征值. 若 $0 < \text{cond}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) < 100$, 则认为没有复共线性; 若 $100 \leq \text{cond}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq 1\,000$, 则认为存在复共线性; 若 $1\,000 < \text{cond}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, 则认为存在严重的复共线性, 系统病态^[6].

当矩阵病态性时, 最小二乘估计不再是一个好的估计, 这时引入正则化方法解决病态性问题, 即是求解 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{L}\| = \min$, 正则化方法的核心是: 用一些与原问题相邻近的解去逼近原问题的解. 如何建立邻近的问题即是构建正则化算子, 如何判断与原问题的邻近程度取决于合适的正则化参数.

1.1 TSVD 方法

矩阵 $\mathbf{A}$ 的 SVD 分解式为

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (2)$$

其中 $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l)$ 由矩阵的左、右特征向量组成, 且 $\mathbf{U} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{V} \in R^{l \times l}$, $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$, $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$ 是非负对角阵, 对角元为矩阵 $\mathbf{A}$ 的非零奇异值, 且 $0 \leq \sigma_l \leq \dots \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$.

$\mathbf{A}$ 的 M-P 广义逆为 $\mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=1}^l \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ ($k = 1, 2, \dots, l$), 采用奇异值分解得的最小范数二乘解为

$$\hat{\mathbf{X}}_{LS} = \sum_{i=1}^l \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i}{\sigma_i}$$

当设计阵严重病态时, 设计阵的一些小奇异值非常接近于 0, 小奇异值会把估计的方差严重放大导致解偏离真值, 使解不稳定. 截断奇异值(TSVD)法是去掉设计阵小的奇异值及其对应的特征向量, 实际上是去除模型参数中不可靠的部分, 用以减小解的方差, 达到稳定解的作用.

TSVD 方法的关键是奇异值的选用个数, 所以需要设定一个阈值, 将小于阈值的奇异值设为 0, 用以消除小的奇异值对解带来的扰动影响. 但是当阈值过小时, 无法消除小奇异值对解带来的影响, 当阈值过大又会导致过多的奇异值被舍弃, 导致大量有用的信息未被利用. TSVD 法的关键是阈值的选取, 当阈值选取比较合理时, 解才会比较稳定. TSVD 的解为

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L} \mathbf{v}_i}{\sigma_i} \quad 1 \leq k \leq l$$

其中 k 为截断参数, 通常作为 TSVD 法的正则化参数.

文献[11]提出了基于信噪差异指标的选择截断参数的新方法. 文献[12]提出了利用复共线性诊断法确定截断参数的奇异值修正方案. 文献[13]选择较小奇异值特征向量构造正则化矩阵, 调节各奇异值的修正. 文献[14]通过正交阵 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 的变换构造正则化矩阵.

现引入变换量:

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}_k \quad \tilde{\mathbf{L}} = (\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_n)^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}$$

经过计算得

$$\tilde{\mathbf{X}}_k = \left(\frac{\tilde{l}_1}{\sigma_1}, \frac{\tilde{l}_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\tilde{l}_k}{\sigma_k}, 0, \dots, 0 \right)^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}$$

模型(1)的解为 $\hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{X}}_k$.

TSVD 方法等价于用良态矩阵 $\mathbf{A}_k = \mathbf{U} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) \mathbf{V}^T$ 逼近系数矩阵 $\mathbf{A}$, 即 $\mathbf{A}_k \mathbf{X} = \mathbf{L}$ 逼近 $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{L}$. 经过上述变换后的 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 同样满足正则化原则^[14], 有 $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{L}\|^2 = \sum_{j=k+1}^n \tilde{l}_j^2$.

1.2 Tikhonov 正则化方法

Tikhonov 正则化方法在解决病态性问题, 即是在有限维空间上, 以最小二乘准则为基础, 引入正则化矩阵和正则化参数, 对解作约束, 将问题转换为最优化问题

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{L}\|^2 + \|\mathbf{R}_\mu \mathbf{x}\|^2 = \min \quad (3)$$

其中 $\mathbf{R}_\mu$ 是正则化矩阵, $\mu > 0$ 是正则化参数, 解为 $\hat{\mathbf{X}}_\mu = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}_\mu)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}$, 一般情况下 $\mathbf{R}_\mu = \mu \mathbf{I}$.

采取同样的变换方法, 把 $\tilde{\mathbf{X}}_\mu = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{X}}_\mu$, $\tilde{\mathbf{L}} = [\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_n]^T = \mathbf{U}^T \mathbf{L}$, $\mathbf{R}_\mu = \mu \mathbf{I}$ 代入(3)式, 得

$$\|\boldsymbol{\Sigma} \tilde{\mathbf{X}}_\mu - \tilde{\mathbf{L}}\|^2 + \mu^2 \|\tilde{\mathbf{X}}_\mu\|^2 = \min \quad (4)$$

解为

$$\tilde{\mathbf{X}}_\mu = (\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \mu^2 \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\mathbf{L}} \quad \mu > 0$$

正则化解 $\hat{\mathbf{X}}_\mu = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{X}}_\mu$, 并且满足

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{X}}_\mu = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (5)$$

对矩阵 $\mathbf{A}$ 进行奇异值分解, 得到 $\hat{\mathbf{X}}_\mu = \sum_{i=1}^l \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \mu^2} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$, μ 的作用是过滤掉小奇异值对解的影响, 达到

稳定解的作用. 经过变换后的 $\tilde{\mathbf{X}}_\mu$ 同样满足正则化原则^[14].

2 新的 Tikhonov 正则化方法

Tikhonov 正则化方法中, 所有的解 $\hat{\mathbf{X}}_\mu$ 都包含 $\mathbf{v}_i$, 正则化矩阵 $\mathbf{R}_\mu = \mu \mathbf{I}$ ($\mu > 0$) 抑制了 $\boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\mathbf{L}}$ 中的所有部分, 对所有奇异值都做了变化, 求解过程可能会过度光滑. TSVD 法没有抑制, 但是直接把一部分小奇异值取为 0, 这在降低方差的同时, 也会影响解的分辨率, 导致解的精度不高. 新的 Tikhonov 正则化方法, 通过选取正则化矩阵 $\mathbf{R}_\mu$, 可以避免 $\hat{\mathbf{X}}_\mu$ 中 $\mathbf{v}_i$ 受到抑制, 并且只对小奇异值做变化.

本文设定小奇异值标准差分量之和占标准差比重达到 95% 以上时, 这些奇异值为影响严重的小奇异值, 应对其进行正则化以缓解对标准差的影响, 判定条件可表示为^[13]

$$\sum_{i=k}^l \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \geq 95\% \sum_{i=1}^l \frac{\sigma_0}{\sigma_i}$$

令 k 为正则化参数, 引入

$$\mathbf{R}_{k,\mu} = \mathbf{D}_{k,\mu} \mathbf{V}^T \quad (6)$$

其中 $\mathbf{D}_{k,\mu}^2 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \uparrow}, \mu, \mu, \dots, \mu)$. 所以可以得到

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k,\mu} = (\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{D}_{k,\mu}^2)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\mathbf{L}}$$

则

$$\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{D}_{k,\mu}^2 = \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2, \sigma_{k+1}^2 + \mu^2, \dots, \sigma_l^2 + \mu^2] \in R^{l \times l} \quad \mu > 0 \quad (7)$$

(7) 式为正定阵, 解是存在的.

模型(1) 的解为

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}_{k,\mu}^T \mathbf{R}_{k,\mu}) \hat{\mathbf{X}}_{k,\mu} = \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (8)$$

$\hat{\mathbf{X}}_{k,\mu}$ 中, 矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}_{k,\mu}^T \mathbf{R}_{k,\mu}$ 最小的特征值变成了 $\mu^2 + \sigma_m^2$. 可以比较看出新方法的 Tikhonov 正则化方程(8) 式中的矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{R}_{k,\mu}^T \mathbf{R}_{k,\mu}$ 比 Tikhonov 正则化方程(5) 的矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu^2 \mathbf{I}$ 更接近 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, 更满足正则化原则, 所以新 Tikhonov 正则化方法的解更接近我们想要的估计值.

$\mathbf{D}_{k,\mu}^2$ 的取值不同, 可以得到不同的正则化矩阵, 同样也就得到不同的正则化方法. 通过引入变量 $\mathbf{R}_{k,\mu} = \mathbf{D}_{k,\mu} \mathbf{V}^T$ 就把正则化的解的形式统一起来. 不同的正则化方法体现在对病态法矩阵 $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 增加滤波因子. 滤波因子 φ 起到了正则化参数的作用, 不同的正则化准则, 就有形式不同的滤波因子, 就可以得到不同的正则化方法.

TSVD 方法的解和滤波因子分别为:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \sum_{i=1}^l \varphi_k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad \varphi_k = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq k \\ 0 & k < i \leq l \end{cases}$$

Tikhonov 正则化方法的解和滤波因子分别为:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\mu} = \sum_{i=1}^l \varphi_{\mu} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \qquad \varphi_{\mu} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \mu^2} \qquad 1 \leq i \leq l$$

新 Tikhonov 正则化方法的解和滤波因子分别为:

$$\hat{\mathbf{X}}_{k,\mu} = \sum_{i=1}^l \varphi_{k,\mu} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{L}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \qquad \varphi_{k,\mu} = \begin{cases} 1 & 1 < i \leq k \\ \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \mu^2} & k < i \leq l \end{cases}$$

新的 Tikhonov 正则化方法的滤波因子当 $1 \leq i \leq k$ 时 $\varphi_{k,\mu} = \varphi_k$, 当 $k \leq i \leq l$ 时 $\varphi_{k,\mu} = \varphi_{\mu}$. 这说明新方法融合了 TSVD 正则化方法和 Tikhonov 正则化方法. 与 TSVD 方法相比, 新 Tikhonov 正则化方法没有舍弃小的奇异值, 所以解的保真效果更好; 相比 Tikhonov 正则化方法对全部奇异值不加区别地进行修正导致解的精确性遭到削弱, 新 Tikhonov 正则化方法只是对小奇异值进行修正, 大奇异值保持不变, 从而保证解的精确性.

3 算例分析

例 1 已知一个模拟空间测边网^[3], $D_1, \cdots, D_9$ 为 9 个已知点. 测边网的坐标列于表 1, 9 个已知点到 2 个未知点 D_{10}, D_{11} (假设模拟真值分别为 $(0, 0, 0)$ 和 $(7, 10, -5)$) 的观测距离也列于表 1. 2 个未知点之间的观测距离为 $d_{10,11} = 13.107\ 85\ \text{m}$. 各距离为等精度观测, 中误差为 $\pm 0.01\ \text{m}$. 要求根据 19 个观测距离确定 2 个未知点的坐标.

表 1 控制点的坐标和观测距离 (单位: m)

点号	坐标 /m			观测距离 /m	
	X	Y	Z	$d_{i,10}$	$d_{i,11}$
D_1	23	10	0.01	25.078 69	16.765 17
D_2	-10	9.99	0	14.134 51	17.719 65
D_3	35	10.01	-0.01	36.415 88	28.442 94
D_4	100	19.99	0.005	101.479 43	93.168 39
D_5	-36	10.005	0	37.364 22	43.299 05
D_6	0	10.01	-0.05	10.010 04	8.600 6
D_7	56	9.995	0.01	56.996 06	49.256 18
D_8	-15	10.015	-0.01	18.035 9	22.559 66
D_9	-1.7	10.008	0.015	10.150 63	10.043 82

算法 先列出观测方程, 对于非线性的误差方程, 平差前将其线性化, 线性化以后看得出设计阵 $\mathbf{A}$. 利用 MATLAB 进行计算, 法矩阵的条件数为 $4.601\ 5 \times 10^3$, 属于病态严重. 最小二乘解已经不是良好的估计值. 由判定条件 $\sum_{i=k}^n \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \geq 95\% \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{\sigma_i}$, 确定正则化参数 $k = 5$, 利用 L-曲线法确定出 $\mu = 0.491\ 5$. 计算出 3 种方法的解, 再计算出均方误差进行比较 (表 2), 可以发现新 Tikhonov 正则化方法估计的均方误差比 TSVD 方法和 Tikhonov 正则化方法估计的均方误差小, 说明估计效果较好.

表 2 3 种方法解算结果及精度

$\hat{\mathbf{X}}$	坐标值						$\text{MSE}(\hat{\mathbf{X}})$
真值	0	0	0	7	10	-5	0
Tikhonov 正则化法估计	-0.041 1	0.027 4	0.085 0	6.974 5	10.035 9	-4.874 5	28.855 5
TSVD 法估计	-0.040 9	0.042 3	0.092 0	6.979 3	10.143 0	-4.776 7	29.069 9
新 Tikhonov 正则化法估计	-0.040 6	0.043 1	0.845 7	6.984 9	9.773 4	-4.766 2	27.957 5

例 2 航空重力测量数据向下延拓模拟试验^[15]. 在 $2^\circ \times 2^\circ$ 的某丘陵区域由 EGM2008 模型生成 576 个网格点的重力异常数据, 将其作为真值, 如图 1 所示. 将地面数据向上延拓至空中 3 400 m 比地面区域稍大的区域内, 并作正态随机扰动, 形成空中重力测量数据的模拟观测值. 本文按 3 种方式进行延拓解算, 并求

出各种解值的均方差,作为精度指标考察求解质量^[15]. 解算结果见表 3 及图 1—图 4.

表 3 3 种解的统计分析/ms²

估计方法	解的精度	与真值的最小差值	与真值的最大差值	参数
TSVD 法	$1.442\ 7\times 10^{-4}$	$1.032\ 4\times 10^{-8}$	$4.870\ 9\times 10^{-4}$	截断参数为 476
Tikhonov 正则化法	$1.155\ 9\times 10^{-5}$	$1.999\ 4\times 10^{-8}$	$3.440\ 6\times 10^{-5}$	$u=0.16$
新 Tikhonov 正则化法	$1.044\ 7\times 10^{-5}$	$3.477\ 7\times e10^{-9}$	$2.841\ 7\times 10^{-5}$	$u=0.16,\ k=50$

由表 3 可以看出, TSVD 估计解算效果严重失真, Tikhonov 估计和新 Tikhonov 估计均可改善求解质量, 而新 Tikhonov 估计改善求解质量效果最佳.

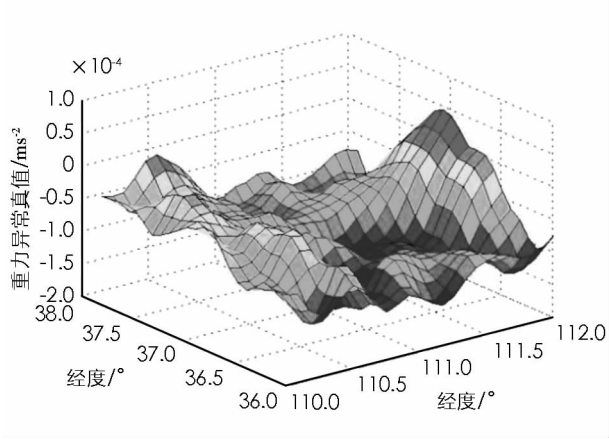


图 1 重力异常真值

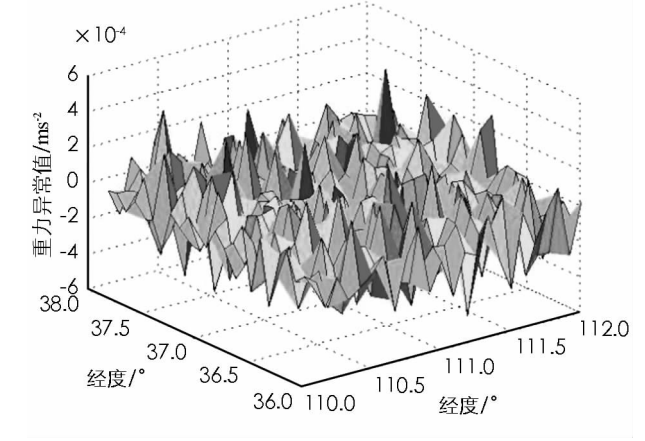


图 2 重力异常的 TSVD 估计

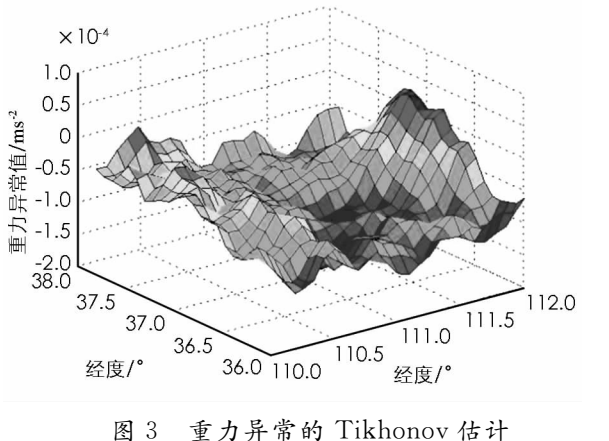


图 3 重力异常的 Tikhonov 估计

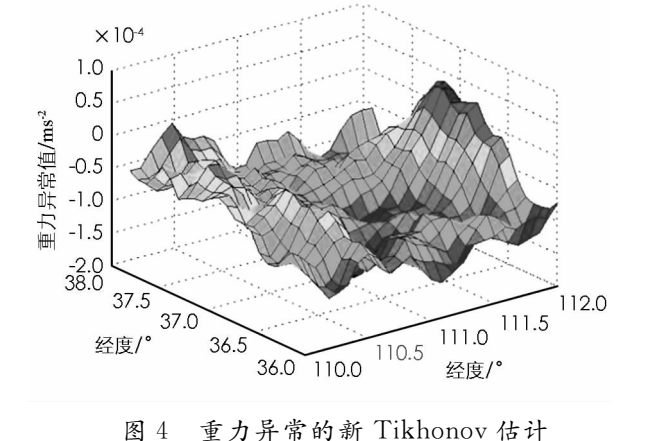


图 4 重力异常的新 Tikhonov 估计

4 结 论

新 Tikhonov 正则化估计既没有舍弃掉小的奇异值,也没有对所有的奇异值进行修正,是介于 TSVD 法和 Tikhonov 正则化估计的一种新方法. 经过实例验证,新估计的均方误差要比 TSVD 法和 Tikhonov 正则化估计的均方误差小,与真值的最大最小差值均较小,这说明新 Tikhonov 正则化估计在改善设计阵的病态性,提高参数估计值稳定性、准确性方面具有一定的优良性.

参考文献:

[1] TIKHONOV A N, ARSENIN V Y. Solutions of Ill-Posed Problems [J]. Mathematics of Computation, 1977, 144(32): 491—497.

[2] XU P L, GRAFAREND E. A Multi-Objective Second-Order Optimal Design for Deforming Networks [J]. Geophysical Journal International, 1995, 120(3): 577—589.

[3] 归庆明, 郭建峰. 病态平差模型直接解算方法的研究 [J]. 大地测量与地球动力学, 2004, 24(3): 15—18.

[4] 李平, 王椿镛, 许厚泽, 等. 地球物理反演中奇异值分解应用的若干问题探讨 [J]. 自然科学进展, 2001, 11(8): 891—896.

[5] 王振杰, 欧吉坤. 一种新的病态问题奇异值修正方案及其在大地测量中的应用 [J]. 自然科学进展, 2004, 14(6): 672—676.

[6] 陈希孺. 一种非参数回归估计量的条件平均绝对误差的指数收敛速度 [J]. 数学学报, 1987, 30(4): 433—443.

[7] 黄维彬. 近代平差理论及其应用 [M]. 北京: 解放军出版社, 1992.

[8] 王振杰, 欧吉坤. 用 L -曲线法确定岭估计中的岭参数 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2004, 29(3): 235—238.

[9] 杨文采. 地球物理反演的理论与方法 [M]. 北京: 地质出版社, 1997.

[10] 鲁铁定, 陶本藻, 周世健. 矩阵的 SVD 分解性质及其在秩亏网平差中的应用 [J]. 大地测量与地球动力学, 2007, 27(5): 63—67.

[11] 顾勇为, 归庆明. TSVD 解算中选择截断参数的新方法 [J]. 测绘科学技术学报, 2010, 27(3): 176—179.

[12] 郭杰, 归庆明, 郭淑妹, 等. 利用复共线性诊断确定偏差矫正项的截断型岭估计 [J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(6): 785—789.

[13] 林东方, 朱建军, 宋迎春, 等. 正则化的奇异值分解参数构造法 [J]. 测绘学报, 2016, 45(8): 883—889.

[14] FUHRY M, REICHEL L. A New Tikhonov Regularization Method [J]. Number Algorithms, 2012, 59(3): 433—445.

[15] 顾勇为, 归庆明. 航空重力测量数据向下延拓基于信噪比的正则化方法的研究 [J]. 测绘学报, 2010, 39(5): 458—464.

A New Tikhonov Regularization Method

Guo Shu-mei, LI Hao, GUO Jie

Department of Basic, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China

Abstract: A new Tikhonov regularization method is obtained by Matrix transformation. The new Tikhonov regularization method is combined with the truncation singular value method and the Tikhonov regularization method. The three methods are compared by their filtering factors. The three methods are verified by the control network adjustment and gravity downward extension in Geodesy, and the results show that the new method is effective in reducing the mean square error and improving the accuracy of estimation.

Key words: ill-conditioned; singular value decomposition; Tikhonov regularization; filter factors

责任编辑 廖 坤 崔玉洁