第 43 卷 第 8 期　　西 南 师 范 大 学 学 报(自然科学版)　　2018 年 8 月
Vol. 43　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.001

广义 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解[①]

聂祥荣，　郭爱丽，　武玲玲

贵州工程应用技术学院 数学系，贵州 毕节 551700

摘要： 定义广义行(列)Hadamard 延拓矩阵的概念，分别建立广义行 Hadamard 延拓矩阵和广义列 Hadamard 延拓矩阵与母矩阵的奇异值和奇异向量之间的定量关系．对 $m\times n$ 阶母矩阵进行 k 次行和列延拓，所得延拓矩阵的奇异值分别是母矩阵奇异值的 $\sqrt{km+1}$ 和 $\sqrt{kn+1}$ 倍．作为应用，分别给出行和列 Hadamard 延拓矩阵的 Moore-Penrose 逆．最后举例验证所得结果．

关 键 词： 延拓矩阵；母矩阵；Hadamard 矩阵；奇异值分解；Moore-Penrose 逆

中图分类号： O151.21　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2018)08-0001-05

近 20 年来，延拓矩阵的奇异值分解问题受到许多学者关注．2000 年，文献[1]首次分别给出了由单位矩阵和斜单位矩阵作为变换矩阵的 $k-1$ 次行(列)延拓矩阵的奇异值分解．之后，文献[2-3]进一步讨论了由同一个置换矩阵作为变换矩阵的 $k-1$ 次延拓矩阵的奇异值分解．2012 年，文献[4]更为一般地考虑了利用 $k-1$ 个正交矩阵作为变换矩阵的 $k-1$ 次行列延拓矩阵，推广了文献[1-3]的相应结果，拓宽了延拓矩阵应用领域的范围．这些 $k-1$ 次正交型行(列)延拓矩阵的奇异值均为原(母)矩阵奇异值的 $\sqrt{k}$ 倍．近年，文献[5]建立了 k 次行、列共轭延拓矩阵与其母矩阵的实分量矩阵的奇异值和奇异向量的定量关系．

Hadamard 矩阵是一类具有特殊结构的广义上的正交矩阵．鉴于 Hadamard 矩阵在空时频移、信息处理、网络通信编码、谱图分析等方面[6-7]和矩阵奇异值分解方法在图像处理、模式识别、信息认证、优化设计、目标定向等领域[8-13]的广泛应用性，本文考虑用 k 个 Hadamard 矩阵作为变换矩阵对 $m\times n$ 阶矩阵进行 k 次行和列延拓，定义广义行和列 Hadamard 延拓矩阵的概念，讨论它们的奇异值分解，证明其奇异值分别为原矩阵奇异值的 $\sqrt{km+1}$ 和 $\sqrt{kn+1}$ 倍，并由此给出相应延拓矩阵的 Moore-Penrose 逆．本文所得结果是现有文献[1-4]在 Hadamard 矩阵行(列)正交意义下的一种推广．

文中用 $C^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 分别表示全体复 $m\times n$ 阶矩阵、矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置、共轭转置和 Moore-Penrose 逆，$\boldsymbol{I}$ 表示具有相应阶数的单位矩阵．一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{H}$ 称为 Hadamard 矩阵[14]，是指 $\boldsymbol{H}$ 的元素为 1 或 -1，且满足 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=n\boldsymbol{I}$．

1　广义 Hadamard 延拓矩阵的定义

定义 1(广义行 Hadamard 延拓矩阵)　设 $\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_k\in C^{m\times m}$ 为 Hadamard 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$，其中 k 是任意给定的正整数，称矩阵

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1,\ \boldsymbol{H}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{H}_k;\ \boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{H}_2\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$$

---

① 收稿日期：2017-11-14

基金项目：贵州省科学技术基金项目(LKB[2013]11)；贵州省科学技术基金项目(LH[2014]7531)；贵州省科技计划项目(黔科合平台人才[2017]5502)；毕节市科学技术项目(毕科合字[2017]05)．

作者简介：聂祥荣(1963-)，男，副教授，博士，主要从事矩阵代数及其表示理论的研究．

为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次广义行 Hadamard 延拓矩阵，而 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})$ 的母矩阵.

定义 2(广义列 Hadamard 延拓矩阵) 设 $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k \in C^{n\times n}$ 为 Hadamard 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$，其中 k 是任意给定的正整数，称矩阵

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k) = [\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_1 \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{H}_k]$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次广义列 Hadamard 延拓矩阵，而 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)$ 的母矩阵.

2 广义 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解与 Moore-Penrose 逆

本节分别考虑广义行、列 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解与 Moore-Penrose 逆. 先考虑行延拓.

定理 1 设 $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k \in C^{m\times m}$ 为 Hadamard 矩阵，$\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$. 令 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Delta V}^*$，其中 $\boldsymbol{U} \in C^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{V} \in C^{n\times n}$ 是酉矩阵，且:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}(D_r, 0) \in C^{m\times n}$$

$$D_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$$

r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r > 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值. 则 $\boldsymbol{A}$ 的行 Hadamard 延拓矩阵 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})$ 存在奇异值分解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{M\Sigma V}^* \tag{1}$$

其中:

(i) $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\Sigma_1, 0) \in C^{(k+1)m\times n}$，$\Sigma_1 = \mathrm{diag}(\sqrt{km+1}\sigma_1, \sqrt{km+1}\sigma_2, \cdots, \sqrt{km+1}\sigma_r)$;

(ii) $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2]$，而 $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; (\sqrt{km+1})^{-1}\boldsymbol{U}) \in C^{(k+1)m\times m}$，$\boldsymbol{M}_2 \in C^{(k+1)m\times km}$ 使得 $\boldsymbol{M}$ 是酉矩阵.

证 由 $\boldsymbol{H}_t^*\boldsymbol{H}_t = m\boldsymbol{I}(t = 1, 2, \cdots, k)$，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})^* \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A}) =$$

$$(km+1)\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}((\sqrt{km+1}D_r)^2, 0)\boldsymbol{V}^* \tag{2}$$

所以，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})$ 的非零奇异值是 $\sqrt{km+1}\sigma_1, \sqrt{km+1}\sigma_2, \cdots, \sqrt{km+1}\sigma_r$. 另一方面，有

$$\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{M}_2^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} \end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{AV} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{U\Delta V}^*\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}_1 \sqrt{km+1}\boldsymbol{\Delta}$$

注意到 $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2]$ 是酉矩阵，从而有 $\boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{M}_2^*\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{0}$，我们可得:

$$\boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{M}_1\sqrt{km+1}\boldsymbol{\Delta} = \sqrt{km+1}\boldsymbol{\Delta}$$

$$\boldsymbol{M}_2^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}_2{}^*\boldsymbol{M}_1(\sqrt{km+1}\boldsymbol{\Delta}) = \boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Sigma}$，故 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})$ 具有奇异值分解(1).

特别地，在定理 1 中令

$$\boldsymbol{M}_2 = [\boldsymbol{M}_{11} \quad \boldsymbol{M}_{12} \quad \cdots \quad \boldsymbol{M}_{1k}] \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_{1t} = \begin{bmatrix} m(\sqrt{m(tm+1)[(t-1)m+1]})^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_{t-1}; \boldsymbol{I}) \\ -[(t-1)m+1]\sqrt{m(tm+1)[(t-1)m+1]})^{-1}\boldsymbol{H}_t \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad t = 1, 2, \cdots, k \tag{4}$$

容易验证，$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2]$ 是酉矩阵且满足定理 1 中的(ii). 由 Moore-Penrose 逆的唯一性，有:

推论 1 设 $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的定义如定理 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的行 Hadamard 延拓矩阵 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})$

的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k; \boldsymbol{A})^{\dagger} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}((\sqrt{km+1})^{-1}D_r^{-1}, 0)\boldsymbol{M}^*$$

其中 $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{M}_1 \quad \boldsymbol{M}_2]$，$\boldsymbol{M}_1$ 如定理 1 所定义，而 $\boldsymbol{M}_2$ 如(3) 式所定义.

注 1　一般地，定理 1 中的 $\boldsymbol{M}_2$ 可通过解齐次线性方程组 $\boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系使其标准正交化得到.

下面给出列 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解与 Moore-Penrose 逆.

定理 2　设 $\boldsymbol{A} \in C^{m\times n}$，$\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k \in C^{n\times n}$ 为 Hadamard 矩阵. 令 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Delta V}^*$，其中 $\boldsymbol{U} \in C^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{V} \in C^{n\times n}$ 是酉矩阵，且：

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathrm{diag}(D_r, 0) \in C^{m\times n}$$

$$D_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$$

r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r > 0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值，则 $\boldsymbol{A}$ 的列 Hadamard 延拓矩阵 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)$ 存在奇异值分解

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k) = \boldsymbol{U\Sigma N} \tag{5}$$

其中：

(i) $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\Sigma_2, 0) \in C^{m\times(k+1)n}$，$\Sigma_2 = \mathrm{diag}(\sqrt{kn+1}\sigma_1, \sqrt{kn+1}\sigma_2, \cdots, \sqrt{kn+1}\sigma_r)$；

(ii) $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1 \\ \boldsymbol{N}_2\end{bmatrix}$，而 $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{F}((\sqrt{kn+1})^{-1}\boldsymbol{V}^*; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k) \in C^{n\times(k+1)n}$，$\boldsymbol{N}_2 \in C^{kn\times(k+1)n}$ 使 $\boldsymbol{N}$ 是酉矩阵.

证　由于

$$[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)]^* = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1^*, \boldsymbol{H}_2^*, \cdots, \boldsymbol{H}_k^*; \boldsymbol{A}^*)$$

且 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{V\Delta}^*\boldsymbol{U}^*$，根据定理 1，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1^*, \boldsymbol{H}_2^*, \cdots, \boldsymbol{H}_k^*; \boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{N}^*\boldsymbol{\Sigma}^*\boldsymbol{U}^* \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{N}^* = [\boldsymbol{N}_1^* \quad \boldsymbol{N}_2^*]$，$\boldsymbol{N}_1^* = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1^*, \boldsymbol{H}_2^*, \cdots, \boldsymbol{H}_k^*; (\sqrt{kn+1})^{-1}\boldsymbol{V})$，使得 $\boldsymbol{N}^* = [\boldsymbol{N}_1^* \quad \boldsymbol{N}_2^*]$ 是酉矩阵.

将(6) 式中矩阵等式两边共轭转置可知，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)$ 有形如(5) 式的奇异值分解.

由定理 2，可得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)$ 的 Moore-Penrose 逆：

推论 2　设 $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的定义如定理 2，则 $\boldsymbol{A}$ 的列 Hadamard 延拓矩阵 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)$ 的 Moore-Penrose 逆为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \cdots, \boldsymbol{H}_k)^{\dagger} = \boldsymbol{N}^*\mathrm{diag}((\sqrt{kn+1})^{-1}D_r^{-1}, 0)\boldsymbol{U}^*$$

其中 $\boldsymbol{N}$ 如定理 2 中的(ii) 所定义.

3　数值算例

例 1　设：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & 0 & i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$ 是 4 阶 Hadamard 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的非零奇异值为 $\sigma_1=1$，$\sigma_2=3$，$\sigma_3=\sqrt{6}$，$\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解、$\boldsymbol{A}$ 的 2 次广义行 Hadamard 延拓矩阵 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2;\boldsymbol{A})$ 的奇异值分解及其 Moore-Penrose 逆分别为：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U\Delta V}^*$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2;\boldsymbol{A})=\boldsymbol{M\Sigma V}^*$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2;\boldsymbol{A})^{\dagger}=\boldsymbol{V\Sigma}^{\dagger}\boldsymbol{M}^*$$

其中：

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(3,9,3\sqrt{6},0)\\ 0\end{bmatrix}\in C^{12\times 4}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\dagger}=\begin{bmatrix}\operatorname{diag}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{\sqrt{6}}{18},0\right) & 0\end{bmatrix}\in C^{4\times 12}$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1-i}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{2m+1}} & \frac{m\boldsymbol{I}}{\sqrt{m(m+1)}} & \frac{m\boldsymbol{I}}{\sqrt{m(2m+1)(m+1)}}\\ \frac{\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{2m+1}} & \frac{-\boldsymbol{H}_1}{\sqrt{m(m+1)}} & \frac{m\boldsymbol{H}_1}{\sqrt{m(2m+1)(m+1)}}\\ \frac{\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{2m+1}} & \boldsymbol{0} & \frac{-(m+1)\boldsymbol{H}_2}{\sqrt{m(2m+1)(m+1)}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\boldsymbol{U}}{3} & \frac{2\boldsymbol{I}}{\sqrt{5}} & \frac{2\boldsymbol{I}}{3\sqrt{5}}\\ \frac{\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{U}}{3} & \frac{-\boldsymbol{H}_1}{2\sqrt{5}} & \frac{2\boldsymbol{H}_1}{3\sqrt{5}}\\ \frac{\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{U}}{3} & \boldsymbol{0} & \frac{-5\boldsymbol{H}_2}{6\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

4 后记 —— 行(列)数大于 2 且非 4 的倍数矩阵的 Hadamard 延拓

以上分别导出了广义行和列 Hadamard 延拓矩阵的奇异值分解，并分别给出了这类行、列延拓矩阵的 Moore-Penrose 逆的计算公式. 值得注意的是，如果 Hadamard 矩阵的阶数大于 2，则其阶数是 4 的倍数(参见文献[14]的定理 5.12). 在实际应用中，当所考虑的原矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}$ 的行数 m(列数 n) 大于 2 且不是 4 的倍数时，可对 $\boldsymbol{A}$ 添加 r 个零行(零列) 变为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 使其行数(列数) 为 $m+r=2^s(n+r=2^s)$，其中 s 是某正整数. 根据文献[14] 中的定理 5.13 知，2^s 阶 Hadamard 矩阵存在. 所以，可选择 k 个(可重复)2^s 阶 Hadamard 矩阵，对 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 进行 k 次 $m+r(n+r)$ 阶 Hadamard 行(列) 延拓. 由于 $\widetilde{\boldsymbol{A}}^*\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}(\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{A}}^*=\boldsymbol{AA}^*)$，所得延拓矩阵的奇异值是原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 奇异值的 $\sqrt{k(m+r)+1}$ 倍($\sqrt{k(n+r)+1}$ 倍).

参考文献：

[1] 邹红星，王殿军，戴琼海，等. 延拓矩阵的奇异值分解 [J]. 科学通报，2000，45(14)：1560－1562.

[2] 邹红星，王殿军，戴琼海，等. 延拓矩阵的奇异值分解 [J]. 电子学报，2001，29(3)：289－292.

[3] LI H K. Singular Value Decomposition for *k*-Order Row(Column) Extended Matrix in Signal Processing [M]// PDCN，2010，CCIS. Berlin Heidelberg：Springer-Verlag，2011，137：58－64.

[4] 袁晖坪. 泛延拓矩阵的奇异值分解 [J]. 电子学报，2012，40(8)：1539－1543.

[5] 聂祥荣，王　珂，武玲玲. 广义共轭延拓矩阵的奇异值分解 [J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)，2014，43(6)：661－664.

[6] 王　磊，朱世华，王　君. 基于 Hadarmard 矩阵调制的空时频移键控 [J]. 电子与信息学报，2007，29(10)：2401－2404.

[7] 玉苏甫江，依拉依木，任平安. 基于 Hadamard 矩阵的随机网络编码 [J]. 电子科技，2012，25(5)：105－107.

[8] FARAGALLAH O S. Efficient Video Watermarking Based on Singular Value Decomposition in the Discrete Wavelet Transform Domain [J]. Int J Electron Commun(AEÜ)，2013，67：189－196.

[9] 王权海，荀乔欣，李树丹，等. 基于 Accord. NET 框架的全景图自动拼接 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：37－44.

[10] YANG D C，REHTAN C，LI Y，et al. Identification of Dominant Oscillation Mode Using Complex Singular Value Decomposition Method [J]. Electric Power Systems Research，2012，83：227－236.

[11] ABUTURAB M R. Color Information Verification System Based on Singular Value Decomposition in Gyrator Transform Domains [J]. Optics and Lasers in Engineering，2014，57：13－19.

[12] ERSOY H. Optimum Laminate Design by Using Singular Value Decomposition [J]. Composites(Part B)，2013，52：144－154.

[13] 谭伟杰，冯西安，张杨梅. 基于 Hankel 矩阵分解的互素阵列高分辨目标定向 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(7)：191－198.

[14] ZHANG F Z. Matrix Theory：Basic Results and Techniques [M]. 2th ed. New York：Springer Science＋Business Media，2011：150－153.

Singular Value Decomposition for Generalized Hadamard-Extended Matrix

NIE Xiang-rong，　GUO Ai-li，　WU Ling-ling

Department of Mathematics，Guizhou University of Engineering Science，Bijie Guizhou 551700，China

Abstract：The row(column) generalized Hadamard-extended matrix is defined in this paper. Some quantitative correspondences of the singular values and singular vectors between the row and column generalized Hadamard-extended matrices and their original matrix are derived. For a $m\times n$ matrix，the singular values of the k-order row and k-order column extended matrices are proved to be equal to $\sqrt{km+1}$ and $\sqrt{kn+1}$ times of those of the original matrix，respectively. As applications，the formulas of Moore-Penrose inverses of the row and column generalized Hadamard-extended matrices are given，respectively. Furthermore，a numerical example is also presented to illustrate the results in this paper.

Key words：extended matrix；original matrix；Hadamard matrix；singular value decomposition；Moore-Penrose inverse

责任编辑　廖　坤　崔玉洁