第 43 卷　第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 8 月
Vol. 43　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug.　2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.002

具有极大正规化子的有限群①

薛海波[1]，　蹇　祥[2]，　吕　恒[2]

1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院，重庆 合川 401524；
2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要:设群 G 是有限群. 如果对 G 的任意循环子群 A，都存在素数 p，使得 $|G:N_G(A)|\,\big|\,p$，那么称 G 为 NP-群. 利用循环群的自同构群的性质和群作用等处理手段，证明了有限 NP-群 G 是亚交换群，进而改进了目前已有的关于 NP-群已经取得的结论，即有限 NP-群 G 的导长至多是 3.

关　键　词：可解群；Dedekind 群；正规化子

中图分类号：**O152.1**　　　**文献标志码**：**A**　　　**文章编号**：1000-5471(2018)08-0006-04

在有限群理论里，通过子群具有的特殊性质来研究群的结构是研究有限群的重要手段. 文献[1-2]研究了任意子群的核在该子群的指数整除素数 p 时的有限群的结构，证明了这类群具有指数与 p 有关的极大交换正规子群. 文献[3-4]研究了一类有限 p-群，其任意循环子群在该循环子群的闭包的指数整除 p^2，给出了这类群的幂零类至多是 5. 利用子群的中心化子的结构也可以得到一些群的结构和性质. 文献[5-7]研究了一些有限 p-群或者局部有限群，给出了中心化子的阶较小的群的结构刻画，这些群与Cernikov群和有限极大类 p-群有密切联系. 更多的讨论可以见有关有限 p-群的专著[8].

本文的研究与具有特殊子群的正规化子有关系. 文献[9]分类了所有有限群，其任意交换子群的正规化子等于其中心化子. 本文从另一个角度考虑，即考虑子群的正规化子都是极大子群的有限群. 为了方便，文献[10]给出下面的定义：

定义 1[10]　设 G 是有限群，其任意循环群 A 都存在素数 p 使得 $|G:N_G(A)|\,|\,p$. 称这类群是 NP-群.

文献[10]证明了非幂零的 NP-群是可解群，并且具有 Sylow 塔，且 NP-群的导长最多是 5.

本文改进了文献[10]的结果，证明了有限 NP-群 G 是亚交换群.

文献[11]研究了非正规循环子群的正规化子皆极大的有限群，得到了一些这类群的基本性质和结构.

引理 1[11, 引理3.2.1]　设 q 为群 G 的阶 $|G|$ 的素因子，如果 G 的非正规循环子群的正规化子皆是极大的有限群，且 A 为 G 的非正规循环 q-子群，那么：

(a) $C_G(A)$ 存在 Hall q'-子群 T，且 T 的每个子群都正规于 $N_G(A)$；

(b) 如果 q 为 G 的阶的最小素因子，那么 $N_G(A)=T\times Q$，其中 T 为 $N_G(A)$ 的交换 Hall q'-子群，Q 为 $N_G(A)$ 的 Sylow q-子群.

引理 2[10]　若群 G 是 NP-群，则群 G 具有 Sylow 塔.

① 收稿日期：2017-12-10
基金项目：国家自然科学基金项目(11471266)；中央高校基本科研业务专项基金项目(XDJK2015B033).
作者简介：薛海波(1980-)，女，副教授，主要从事群论的研究.
通信作者：吕　恒，教授.

引理 3[12]　设 π' -群 H 作用在交换 π -群 G 上，则 $G=C_G(H)\times[G,H]$.

引理 4　设群 G 是非幂零 NP -群，p 是整除 $|G|$ 的最小素因子. 若 G 的 Sylow p -子群 G_p 不是正规子群，则：

(a) 当 G_p 不是 Dedekind 群时，则

$$G=H\rtimes G_p$$

其中 H 是交换的 Hall p' -子群；

(b) 当 G_p 是 Dedekind 群时，设 q 是整除 $|G|$ 的最大的素数因子，使得存在 $x\in G_p$，满足 $|G:N_G(\langle x\rangle)|=q$，则

$$G=G_q\rtimes H$$

其中 G_q 是 Sylow q -子群，H 是 Hall $\{q\}'$ -子群，且 $|G_q:C_{G_q}(H)|=q$.

证　(a) 由于 G_p 不是 Dedekind 群. 则存在 $x\in G_p$，使得 $\langle x\rangle$ 不是 G_p 正规子群. 于是 $|G:N_G(\langle x\rangle)|=p$，即存在 Hall p' -子群 H 包含在 $N_G(\langle x\rangle)$ 中. 由引理 1 可得 H 是交换子群. 又由引理 2 可得 $G=G_p\rtimes H$，H 是交换的 Hall p' -子群.

(b) 由引理 1，$N_G(\langle x\rangle)$ 中的 Hall p' -子群是交换群. 于是由引理 2 可得，G 是 Hall $\{q\}'$ -子群，H 是 Dedekind 群，进而可得 $G=G_q\rtimes H$.

设 $y\in H$，使得 $\langle y\rangle$ 不是正规子群，且 $N_G(\langle y\rangle)\neq N_G(\langle x\rangle)$，则

$$N_G(\langle y\rangle)\cap G_q\neq N_G(\langle x\rangle)\cap N_G(\langle y\rangle)\neq N_G(\langle x\rangle)$$

显然：

$$N_G(\langle y\rangle)\cap G_q=C_G(y)\qquad N_G(\langle x\rangle)\cap G_q=C_G(x)$$

不妨假设 G_q 是初等交换 q -群. 由引理 3 有：

$$G_q=[G_q,x]\times C_{G_q}(x)\qquad G_q=[G_q,y]\times C_{G_q}(y)$$

若 $[C_{G_q}(x),y]=1$，则由 $|[G_q,x]|=q$ 可得 $C_{G_q}(x)=C_{G_q}(y)$，因此 $[C_{G_q}(x),y]\neq1$. 类似可得 $[C_{G_q}(y),x]\neq1$. 设：

$$[G_q,x]=\langle a_1\rangle\qquad[G_q,y]=\langle a_2\rangle$$

由于 $[x,a_2]=1$，$[y,a_1]=1$. 则对任意整数 s,t，有

$$[xy,a_1^sa_2^t]=[x,a_1]^s[y,a_2]^t$$

易得 $[x,a_1]\neq1$，$[y,a_2]\neq1$. 因此

$$[xy,\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle]=\langle a_1\rangle\times\langle a_2\rangle$$

从而可得 $|G_q:C_{G_q}(xy)|\geqslant q^2$，即 $|G:N_G(\langle xy\rangle)|\geqslant q^2$，这与 G 是 NP -群相矛盾. 因此

$$N_G(\langle y\rangle)=N_G(\langle x\rangle)$$

若 G_q 不是初等交换 q -群. 由前面结论可得 G_q 的 Frattini 子群 $\mathrm{Frat}(G_q)\leqslant Z(G)$. 又由文献[12]的定理 3.9 可得，对任意 $x\in H$，有

$$C_{G_q/\mathrm{Frat}(G_q)}(x)=C_{G_q}(x)\mathrm{Frat}(G_q)/\mathrm{Frat}(G_q)$$

则

$$C_{G_q/\mathrm{Frat}(G_q)}(x)=C_{G_q/\mathrm{Frat}(G_q)}(y)$$

因此

$$C_{G_q}(x)\mathrm{Frat}(G_q)=C_{G_q}(y)\mathrm{Frat}(G_q)$$

进而可得 $C_{G_q}(x)=C_{G_q}(y)$. 因此 $|G_{q_1}:C_{G_{q_1}}(H)|=q$.

定理 1　设群 G 是 NP -群，则 G 的导长至多是 3.

证　设 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子. 首先考虑 G 的 Sylow p -子群 G_p 不是正规子群.

若 G_p 不是 Dedekind 群，则由引理 4，$G=H\rtimes G_p$，其中 H 是交换的 Hall p' -子群. 对任意 $x,y\in G_p$，

若$[x, H] \neq 1$，$[y, H] \neq 1$，类似引理4(b)的证明，可得$C_H(x) = C_H(y)$．于是存在素数$q \mid |H|$使得$|H : C_H(G_p)| = q$，即$H/C_H(G_p)$是$G/C_H(G_p)$的q阶正规子群．由引理3，$H = C_H(G_p) \times [H, G_p]$．从而说明$[H, G_p]$是$q$阶循环群．考虑商群$G/Z(G)$，易得

$$G/Z(G) = G_pZ(G) \rtimes \langle gZ(G) \rangle / Z(G)$$

于是可得$G_pZ(G)/Z(G)$是循环群，即$G_p' \leqslant Z(G)$．从而可得$[G_p', H] = 1$．又因G_p'是亚交换群，且$G' \leqslant G_p' \times H$，故$G$是亚交换群．

若G_p是Dedekind群．设q_1是整除$|G|$的最大素数因子，使得存在$x \in G_p$，满足$|G : N_G(\langle x \rangle)| = q_1$．令$\pi(G)$表示整除$|G|$的所有素数因子集合，且$\pi(G) = \pi_1 \cup \pi_2$，其中$p, q_1 \in \pi_1$且$q_1$是$\pi_1$中最大素数因子．于是由引理4，$G$的Hall π_1-子群$G_{\pi_1} = G_{q_1} \rtimes H$，其中$G_{q_1}$是Sylow q_1-子群，H是G_{π_1}的Hall $\{q\}'$-子群，且$|G_{q_1} : C_{G_{q_1}}(H)| = q_1$．由文献[12]的推论2.8可知

$$[\Omega_1(G_{q_1}), H] \neq 1$$

其中

$$\Omega_1(G_{q_1}) = \langle g : g^{q_1} = 1, g \in G_{q_1} \rangle$$

于是存在$y \in G_{q_1}$，使得$[H, y] \neq 1$且$y^{q_1} = 1$，即$G_{q_1} = C_{G_{q_1}}(H) \rtimes \langle y \rangle$．令子群$T_1 = Z(G_{\pi_1})C_{G_{q_1}}(H)$，考虑商群

$$G_{\pi_1}/T_1 = \langle yT_1 \rangle \rtimes HT_1/T_1$$

易得HT_1/T_1是循环群，于是$(G_{\pi_1}/T_1)' \leqslant \langle yT_1 \rangle$，因此$H' \leqslant Z(G_{\pi_1})$．又因$[H, G_{\pi_2}] = 1$，则$H' \leqslant Z(G)$．

若$[G_{q_1}, G_{\pi_2}] \neq 1$，由引理1可得$C_{G_{q_1}}(H) \times G_{\pi_2}$是交换群，于是$[y, G_{\pi_2}] \neq 1$．再由$G_{q_1}G_{\pi_2}$是NP-群和引理3，可得

$$[G_{\pi_2}, y] \times C_{G_{\pi_2}}(y) = G_{\pi_2}$$

其中$[G_{\pi_2}, y] = \langle z \rangle$是$q_2$阶子群，$q_2 \in \pi_2$是素数，$C_{G_{\pi_2}}(y) = C_{G_{\pi_2}}(G_{q_1})$．显然

$$C_{G_{\pi_2}}(G_{q_1}) = C_{G_{\pi_2}}(G_{\pi_1})$$

令子群$T_2 = C_{G_{\pi_2}}(G_{\pi_1})$，考虑商群$\overline{G} = G/(T_1T_2)$，则

$$\overline{G} = G_{\pi_2}T_1/(T_1T_2) \rtimes G_{\pi_1}T_2/(T_1T_2)$$

因此$\overline{G}$中的所有Sylow子群都是循环群，即$\overline{G}$是亚交换群．而

$$G_{\pi_2}T_1/(T_1T_2) \cong \langle \overline{z} \rangle \rtimes \overline{y}$$

与

$$G_{\pi_1}T_2/(T_1T_2) \cong \langle \overline{y} \rangle \rtimes \overline{H}$$

都是非交换群，于是$\langle \overline{z} \rangle \rtimes \overline{y} \leqslant \overline{G}'$，这与$\overline{G}$是亚交换群相矛盾．因此$[G_{q_1}, G_{\pi_2}] = 1$．

因为$G_{q_1} = C_{G_{q_1}} \rtimes [H, G_{q_1}]$，其中$[H, G_{q_1}] = \langle y \rangle$，由于$G_{q_1}$也是NP-群，则$N_{G_{q_1}}(y) = C_{G_{q_1}}(y)$是$G_{q_1}$的极大子群或者等于$G_{q_1}$．故$G_{q_1}$的幂零类至多是2．从而可得$\langle y \rangle G_{q_1}'$是交换群．又因$G'_{\pi_1} \leqslant H'[H, G_{q_1}]G_{q_1}'$，则

$$G' \leqslant H' \times [H, G_{q_1}]G_{q_1}' \times G_{\pi_2}$$

设p是整除$|G|$的最小素因子，且G的Sylow p-子群G_p不是正规子群，则由群G具有Slyow塔可得

$$G = G_1 \times G_2$$

其中，对任意整除$|G_1|$的素数因子r都有$r < p$，对任意整除$|G_2|$的素数因子s都有$s \geqslant p$．显然G_1是Dedekind群．由于G_2也是NP-群，则G_2的导长至多为2．故NP-群的导长至多是2．

参考文献：

[1] CUTOLO G, KHUKHRO E I, LENNOX J C, et al. Finite Core-p p-Groups [J]. J of Algebra, 1997, 188(2):

701－719.

[2] CUTOLO G，SMITH H，WIEGOLD J. On Core-2-Groups [J]. J of Algebra，2001，237(2)：813－841.

[3] LV H，ZHOU W，YU D P. Some Finite p-Groups with Bounded Index of Every Cyclic Subgroup in Its Normal Closure [J]. J Algebra，2011，338(2)：169－179.

[4] LV H，ZHOU W，GUO X Y. Finite 2-Groups with Index of Every Cyclic Subgroup in Its Normal Closure No Greater than 4 [J]. J Algebra，2011，342(1)：256－264.

[5] 薛海波，吕　恒. 一类具有特殊中心化子的有限 p-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(10)：1－4.

[6] 薛海波，吕　恒. 含有 CC-子群的局部有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(12)：10－12.

[7] 薛海波，吕　恒. 非交换子群具有极小中心化子的有限 p-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(8)：12－15.

[8] BERKOVICH Y，JANKO Z. Groups of Prime Power Order [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2008.

[9] LI S R. The Structure of NC-Groups [J]. Journal of Algebra，2001，241(2)：611－619.

[10] 蹇　祥，吕　恒. 具有极大正规化子的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：56－60.

[11] 曹建基. 非正规循环子群的正规化子皆极大的有限群 [D]. 上海：上海大学，2014.

[12] 徐明耀. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

Finite Groups with Maximal Normalizer

XUE Hai-bo[1]，　JIAN　Xiang[2]，　LÜ　Heng[2]

1. *Department of Science and Engineering*，*Chongqing College of Humanities Science and Technology*，*Hechuan Chongqing 401524*，*China*；

2. *School of Mathematics and Statistics*，*Southwest University*，*Chongqing 400715*，*China*

Abstract：A finite group G is called a NP-group if there is a prime number p such that $|G:N_G(A)| \mid p$ for every non-normal cyclic subgroup A of G. In this paper，by using the property of autormorphism group of cyclic group and group action，it proves that a finite NP-group G is meta-abelian and improved the result that a derived length of a finite NP-group G is at most 3.

Key words：soluble group；Dedekind group；normalizer

责任编辑　廖　坤　崔玉洁