第 43 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 8 月
Vol. 43 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.003

涉及零点与多项式的无零点亚纯函数族的正规性①

陈鸿辉, 蔡金华, 袁文俊

广州大学 数学与信息科学学院,广州 510006

摘要:主要讨论了涉及零点与多项式的无零点亚纯函数族的正规性. 主要结果为:设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数,k,q 为正整数,$h(z)$为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数. 若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$,且$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$至多有 $q(k+1)-1$ 个不同的零点(不计重数),那么 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

关 键 词:亚纯函数;正规性;零点

中图分类号:O174.52 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2018)08-0010-08

设 $\mathscr{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数,如果对于 $\mathscr{F}$ 的任一族子列 $\{f_n\}$,存在子序列 $\{f_{n_j}\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于一亚纯函数(或者 ∞),则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规[1-3].

定理 1[4] 设 f 为 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数,k 为正整数,则 f 或 $f^{(k)}-1$ 至少有 1 个零点. 若 f 为超越亚纯函数时,则 f 或者 $f^{(k)}-1$ 有无穷多个零点.

文献[5]证明了与定理 1 对应的正规定则:

定理 2[5] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,k 为正整数,若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$ 且 $f^{(k)}(z)\neq 1$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

文献[6]改进了定理 2,证明了:

定理 3[6] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数,k 为正整数,若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$ 且 $f^{(k)}(z)\neq h(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

文献[7]把定理 2 中的"$f^{(k)}(z)\neq 1$"换成"$f^{(k)}(z)=1$",并且限制其零点的个数,证明了下面的定理:

定理 4[7] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,k 为正整数,若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$ 且 $f^{(k)}(z)-1$ 至多有 k 个不同零点(不计重数),则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

文献[8]推广了定理 3 和定理 4,得到下面的结果:

定理 5[8] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数,k 为正整数,若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$ 且 $f^{(k)}(z)-h(z)$ 至多有 k 个不同零点(不计重数),则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

我们将定理 5 的"$f^{(k)}(z)-h(z)$"替换为"$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$",得到本文主要结果:

定理 6 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数,k,q 为正整数,$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数,若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f(z)\neq 0$,且$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ 至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点(不计重数),那么 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

例 1 设 $\mathscr{F}=\left\{f_n(z)=\dfrac{1}{nz}: n=1,2,\cdots\right\}$, $D=\{z: |z|<1\}$, $h(z)=\dfrac{1}{z^k}$,其中 k,q 为正整数,那么

---

① 收稿日期:2017-12-26

基金项目:国家自然科学基金项目(11271090);广东省自然科学基金项目(2016A030310257、2015A030313346);广州大学研究生创新研究资助计划项目(2017GDJC-M30).

作者简介:陈鸿辉(1991-),男,硕士研究生,主要从事复分析及其应用的研究.

通信作者:袁文俊,教授,博士研究生导师.

$$(f_n(z)^{(k)})^q-(h(z))^q=\left(\frac{(-1)^k k!}{nz^{k+1}}\right)^q-\frac{1}{z^{qk}}=\frac{\left(\frac{(-1)^k k!}{n}\right)^q-z^q}{z^{q(k+1)}}$$

在区域 D 内有 q 个零点，但 $\mathscr{F}$ 在 D 内不正规. 这表明定理 6 中的条件“$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数”是必要的.

例 2　设 $\mathscr{F}=\left\{f_n(z)=\frac{1}{nz}: n\geqslant k!2^{k+1}+1\right\}$，$D=\{z: |z|<1\}$，$h(z)=\frac{1}{(z-1)^{(k+1)}}$，其中 k,q 为正整数，则对任意 $f_n\in\mathscr{F}$，$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ 在区域 D 内有 $q(k+1)$ 个不同零点，但 $\mathscr{F}$ 在 D 内不正规，这表明定理 6 中的条件“$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ 至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点”是最好的.

注 1　文献[8]给出了例 1 和例 2 在 $q=1$ 情形下的结论.

为了证明定理 6，我们需要以下引理：

引理 1[9-10]　设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，k 为正整数. $\mathscr{F}$ 中的每个函数的零点重级至少为 k. 存在 $A\geqslant 1$，若 $f(z)=0$，必有 $|f^{(k)}(z)|\leqslant A$. 若 $\mathscr{F}$ 在 $z_0\in D$ 处不正规，则对于每个 α，$0\leqslant\alpha\leqslant k$，存在函数列 $\{f_n\}\in\mathscr{F}$、点列 $\{z_n\}\in D(z_n\to z_0)$、正数列 $\{\rho_n\}(\rho_n\to 0)$，使得函数 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，并且 g 的所有零点重级至少为 k，$g^{\#}(\xi)\leqslant g^{\#}(0)=kA+1$. 特别地，$g$ 的级至多为 2.

引理 2[11]　设 $f(z)$ 为非常数有理函数，$k,q(\geqslant 1)$ 为两个正整数. 若 $f(z)\neq 0$，则 $(f^{(k)}(z))^q-1$ 至少有 $q(k+1)$ 个不同零点(不计重数).

引理 3[12]　设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，$a_1,a_2,\cdots,a_q$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上互不相同的亚纯函数. 若 $a_i(i=1,2,\cdots,q)$ 是 $f(z)$ 的小函数，$T(r,a)<o(T(r,f))$，则对任意的 $\epsilon>0$，有

$$(q-2-\epsilon)T(r,f)\leqslant\sum_{i=1}^{q}\overline{N}(r,a_i,f)+o(T(r,f))$$

引理 4　设 $f(z)$ 为超越亚纯函数，$a(z)$ 为不恒为 0 的多项式，k,q 为正整数. 若 $f(z)\neq 0$，则 $(f^{(k)}(z))^q-a(z)$ 有无穷多个零点.

证　若 $q=1$，文献[3]给出了此情形的证明.

若 $q>1$，假设 $(f^{(k)}(z))^q-a(z)$ 只有有限个零点，根据引理 3，我们可以得到

$$\begin{aligned}T(r,(f^{(k)})^q)&\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{(f^{(k)})^q}\right)+\overline{N}(r,(f^{(k)})^q)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{(f^{(k)})^q-a(z)}\right)+S(r,(f^{(k)})^q)\leqslant\\&\frac{1}{q}N\left(r,\frac{1}{(f^{(k)})^q}\right)+\frac{1}{q(k+1)}N(r,(f^{(k)})^q)+S(r,(f^{(k)})^q)=\\&\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q(k+1)}\right)T(r,(f^{(k)})^q)+S(r,(f^{(k)})^q)\end{aligned}$$

因此

$$T(r,(f^{(k)})^q)=S(r,(f^{(k)})^q)$$

这与“$f(z)$ 是超越亚纯函数”矛盾，所以假设不成立，则 $(f^{(k)}(z))^q-a(z)$ 有无穷多个零点.

注 2　关于引理 4，文献[4]证明了 $k>1$，$q=1$，a 为常数的情形，文献[13]证明了 $q=k=1$，a 为常数的情形，文献[14]证明了 $q=k=1$，a 为多项式的情形，文献[3,15]证明了 $k>1$，$q=1$，a 为多项式的情形，文献[11]证明了 $k>1$，$q>1$，a 为常数的情形.

引理 5　设 $f(z)$ 为非常数有理函数，$a(z)$ 为不恒为 0 的多项式，$k,q(\geqslant 1)$ 为两个正整数. 若 $f(z)\neq 0$，则 $(f^{(k)}(z))^q-a(z)$ 至少有 $q(k+1)$ 个不同零点(不计重数).

证　若 $\deg(a(z))=0$，则由引理 2 知结论成立. 以下考虑 $\deg(a(z))>0$ 的情况. 因为 $f(z)$ 为非常数有理函数，且 $f(z)\neq 0$，因此 $f(z)$ 不可能为多项式，即 $f(z)$ 至少有 1 个极点. 经简单计算可得，$(f^{(k)}(z))^q-a(z)$ 至少有 1 个零点，因此有：

$$a(z)=A\prod_{i=1}^{m}(z+v_i)^{m_i}\tag{1}$$

$$f(z)=\frac{C_1}{\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{n_i}} \tag{2}$$

$$(f^{(k)}(z))^q=a(z)+\frac{C_2\prod_{i=1}^{s}(z+\omega_i)^{l_i}}{\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{q(n_i+k)}} \tag{3}$$

其中：A,C_1,C_2 为非零复数，m,n,s,l_i,m_i,n_i 均为正整数，$\upsilon_i(1\leqslant i\leqslant m),\omega_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 和 $z_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 相互判别.

设 $M=\sum_{i=1}^{m}m_i$，$N=\sum_{i=1}^{n}n_i$，则 $\deg(a(z))=M\geqslant 1$. 由(2)式可得

$$f^{(k)}(z)=\frac{P(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{n_i+k}} \tag{4}$$

其中 $P(z)$ 是次数为 $k(n-1)$ 的多项式，

$$(f^{(k)}(z))^q=\frac{(P(z))^q}{\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{q(n_i+k)}}=\frac{Q(z)}{\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{q(n_i+k)}} \tag{5}$$

我们得到 $Q(z)$ 是次数为 $qk(n-1)$ 的多项式. 由(3)式和(5)式可知

$$a(z)\prod_{i=1}^{n}(z+z_i)^{q(n_i+k)}+C_2\prod_{i=1}^{s}(z+\omega_i)^{l_i}=Q(z) \tag{6}$$

由(6)式可推出

$$\sum_{i=1}^{s}l_i=M+\sum_{i=1}^{n}q(n_i+k)=M+q(N+nk)$$

及 $C_2=-A$. 在(6)式中令 $t=\frac{1}{z}$，可得

$$a\left(\frac{1}{t}\right)\prod_{i=1}^{n}(1+z_it)^{q(n_i+k)}-\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}=t^{M+q(N+k)}A(t) \tag{7}$$

其中 $A(t)=t^{qk(n-1)}Q\left(\frac{1}{t}\right)$是次数不超过 $qk(n-1)$ 的多项式. 将(7)式两边同时除以 $\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}$，有

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\upsilon_it)^{m_i}\prod_{i=1}^{n}(1+z_it)^{q(n_i+k)}}{\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}}=1+\frac{t^{M+q(N+k)}A(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}} \tag{8}$$

注意到，当 $t\rightarrow 0$ 时，有

$$\frac{t^{M+q(N+k)}A(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}}=t^{M+q(N+k)}(a_0+a_1t+\cdots)=o(t^{M+q(N+k)+1}) \tag{9}$$

其中 $a_0\neq 0$. 当 $t\rightarrow 0$ 时，结合(8)式和(9)式，有

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\upsilon_it)^{m_i}\prod_{i=1}^{n}(1+z_it)^{q(n_i+k)}}{\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}}=1+o(t^{M+q(N+k)+1}) \tag{10}$$

对(10)式两边同时取对数，得

$$\log\prod_{i=1}^{m}(1+\upsilon_it)^{m_i}+\log\prod_{i=1}^{n}(1+z_it)^{q(n_i+k)}-\log\prod_{i=1}^{s}(1+\omega_it)^{l_i}=\log(1+o(t^{M+q(N+k)+1}))$$

再对 t 进行求导，得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{m_i\upsilon_i}{1+\upsilon_it}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q(n_i+k)z_i}{1+z_it}-\sum_{i=1}^{s}\frac{l_i\omega_i}{1+\omega_it}=o(t^{M+q(N+k)}) \tag{11}$$

令：

$$S_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \cap \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$$
$$S_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \cap \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_s\}$$

以下分 4 种情况进行讨论：

情形 1　当 $S_1 = S_2 = \varnothing$ 时，令 $z_{n+i} = v_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ 和

$$N_i = \begin{cases} q(n_i + k) & 1 \leqslant i \leqslant n \\ m_{i-n} & n+1 \leqslant i \leqslant n+m \end{cases}$$

则(11) 式可写成下面的形式：

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{N_i z_i}{1 + z_i t} - \sum_{i=1}^{s} \frac{l_i \omega_i}{1 + \omega_i t} = o(t^{M+q(N+k)}) \tag{12}$$

将(12) 式写成 t 的幂级展开式

$$\sum_{i=1}^{n+m} N_i z_i^j t^j - \sum_{i=1}^{s} l_i \omega_i^j t^j = 0 \qquad j = 0,1,\cdots,M+q(N+k)-1 \tag{13}$$

对比 t^j 的系数，可得

$$\sum_{i=1}^{n+m} N_i z_i^j - \sum_{i=1}^{s} l_i \omega_i^j = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,M+q(N+k) \tag{14}$$

令 $z_{n+m+i} = \omega_i (1 \leqslant i \leqslant s)$，得

$$\sum_{i=1}^{n+m+s} (N_i - l_i) z_i^j = 0$$

可得线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n+m+s} x_i z_i^j = 0 \tag{15}$$

其中 $0 \leqslant j \leqslant M + q(N+k)$. 并且可知线性方程组有非零解

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}, x_{n+m+1}, \cdots, x_{n+m+s}) = (N_1, N_2, \cdots, N_{n+m}, -l_1, -l_2, \cdots, -l_s) \tag{16}$$

若 $M + q(N+k) \geqslant n+m+s$，由克拉默法则可知，线性方程组有唯一解. 从而线性方程组(16) 的系数矩阵行列式 $\det(z_i^j)_{(m+n+s)\times(m+n+s)} = 0 (j = 0,1,\cdots,M+q(N+k)-1)$. 然而，注意到行列式 $\det(z_i^j)_{(m+n+s)\times(m+n+s)}$ 是范德蒙德行列式，并且 $z_i (1 \leqslant i \leqslant n+m+s)$ 相互判别，所以 $\det(z_i^j)_{(m+n+s)\times(m+n+s)} \neq 0$，矛盾. 所以 $M + q(k+N) < n+m+s$，则

$$\begin{aligned} s > & q(k+N) + M - m - n = \\ & qk + q - 1 + q(N-1) - (n-1) + M - m = \\ & q(k+1) - 1 + q\sum_{i=1}^{n}(n_i - 1) + q(n-1) - (n-1) + M - m = \\ & q(k+1) - 1 + q\sum_{i=1}^{n}(n_i - 1) + (n-1)(q-1) + M - m \end{aligned}$$

结合 $N = \sum_{i=1}^{n} n_i \geqslant n \geqslant 1$ 与 $M = \sum_{i=1}^{m} m_i \geqslant m$，有 $q\sum_{i=1}^{n}(n_i - 1) \geqslant 0$，$(n-1)(q-1) \geqslant 0$，可得 $s \geqslant q(k+1)$.

情形 2　当 $S_1 \neq \varnothing$ 且 $S_2 = \varnothing$ 时，不妨设 $S_1 = \{v_1, v_2, \cdots, v_{M_1}\}$. 当 $1 \leqslant i \leqslant M_1$ 时，$v_i = z_i$，令 $M_3 = m - M_1$，以下分 2 种情况讨论：

情形 2.1　$M_3 \geqslant 1$. 令 $z_{n+i} = v_{M_1+i} (1 \leqslant i \leqslant M_3)$. 如果 $M_1 < n$，则令

$$N_i = \begin{cases} q(n_i + k) + m_i & 1 \leqslant i \leqslant M_1 \\ q(n_i + k) & M_1 + 1 \leqslant i \leqslant n \\ m_{M_1 - n + i} & n+1 \leqslant i \leqslant n + M_3 \end{cases}$$

如果 $M_1 = n$，则令

$$N_i = \begin{cases} q(n_i + k) + m_i & 1 \leqslant i \leqslant n = M_1 \\ m_{M_1 + i - n} & n+1 \leqslant i \leqslant n + M_3 \end{cases}$$

情形 2.2 $M_3=0$. 如果 $M_1<n$,则令

$$N_i=\begin{cases} q(n_i+k)+m_i & 1\leqslant i\leqslant M_1 \\ q(n_i+k) & M_1+1\leqslant i\leqslant n \end{cases}$$

如果 $M_1=n$,则令

$$N_i=q(n_i+k)+m_i \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

在情形 2.1 和情形 2.2 下,(11) 式可写成

$$\sum_{i=1}^{n+M_3}\frac{N_iz_i}{1+z_it}-\sum_{i=1}^{s}\frac{l_i\omega_i}{1+\omega_it}=o(t^{M+q(N+k)}) \qquad t\to 0$$

其中 $0\leqslant M_3\leqslant m-1$,根据情形 1 的方法,可得 $s\geqslant q(k+1)$.

情形 3 当 $S_1=\varnothing$ 且 $S_2\neq\varnothing$ 时,不妨设 $S_2=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_{M_2}\}$. 当 $1\leqslant i\leqslant M_2$ 时,$\upsilon_i=\omega_i$,令 $M_4=m-M_2$. 以下分 2 种情况讨论:

情形 3.1 $M_4\geqslant 1$. 令 $\omega_{s+i}=\upsilon_{M_2+i}(1\leqslant i\leqslant M_4)$. 如果 $M_2<s$,则令

$$L_i=\begin{cases} l_i-m_i & 1\leqslant i\leqslant M_2 \\ l_i & M_2+1\leqslant i\leqslant s \\ -m_{M_2-s+i} & s+1\leqslant i\leqslant s+M_4 \end{cases}$$

如果 $M_2=s$,则令

$$L_i=\begin{cases} l_i-m_i & 1\leqslant i\leqslant s=M_2 \\ -m_{M_2-s+i} & s+1\leqslant i\leqslant s+M_4 \end{cases}$$

情形 3.2 $M_4=0$. 如果 $M_2<s$,则令

$$L_i=\begin{cases} l_i-m_i & 1\leqslant i\leqslant M_2 \\ l_i & M_2+1\leqslant i\leqslant s \end{cases}$$

如果 $M_2=s$,则令

$$L_i=l_i-m_i \qquad 1\leqslant i\leqslant M_2$$

在情形 3.1 和情形 3.2 下,(11) 式可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{q(n_i+k)z_i}{1+z_it}-\sum_{i=1}^{s+M_4}\frac{L_i\omega_i}{1+\omega_it}=o(t^{M+q(N+k)}) \qquad t\to 0$$

其中 $0\leqslant M_4\leqslant m-1$. 根据情形 1 的方法,可得 $s\geqslant q(k+1)$.

情形 4 当 $S_1\neq\varnothing$ 且 $S_2\neq\varnothing$ 时,不妨设 $S_1=\{\upsilon_1,\upsilon_2,\cdots,\upsilon_{M_1}\}$,$S_2=\{\omega_1,\omega_2\cdots,\omega_{M_2}\}$. 当 $1\leqslant i\leqslant M_1$ 时,$\upsilon_i=z_i$;当 $1\leqslant i\leqslant M_2$ 时,$\upsilon_{M_1+i}=\omega_i$. 令 $M_5=m-M_1-M_2$. 以下分 2 种情况讨论:

情形 4.1 $M_5\geqslant 1$. 令 $z_{n+i}=\upsilon_{M_1+M_2+i}(1\leqslant i\leqslant M_5)$. 如果 $M_1<n$,则令

$$N_i=\begin{cases} q(n_i+k)+m_i & 1\leqslant i\leqslant M_1 \\ q(n_i+k) & M_1+1\leqslant i\leqslant n \\ m_{M_1+M_2-n+i} & n+1\leqslant i\leqslant n+M_5 \end{cases}$$

如果 $M_1=n$,则令

$$N_i=\begin{cases} q(n_i+k)+m_i & 1\leqslant i\leqslant n \\ m_{M_1+M_2+i-n} & n+1\leqslant i\leqslant n+M_5 \end{cases}$$

如果 $M_2<s$,则令

$$L_i=\begin{cases} l_i-m_{M_1+i} & 1\leqslant i\leqslant M_2 \\ l_i & M_2+1\leqslant i\leqslant s \end{cases}$$

如果 $M_2=s$,则令

$$L_i=l_i-m_{M_1+i} \qquad 1\leqslant i\leqslant M_2$$

情形 4.2 $M_5=0$. 如果 $M_1<n$,则令

$$N_i=\begin{cases}q(n_i+k)+m_i & 1\leqslant i\leqslant M_1\\ q(n_i+k) & M_1+1\leqslant i\leqslant n\end{cases}$$

如果 $M_1=n$，则令

$$N_i=q(n_i+k)+m_i\qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

如果 $M_2<s$，则令

$$L_i=\begin{cases}l_i-m_{M_1+i} & 1\leqslant i\leqslant M_2\\ l_i & M_2+1\leqslant i\leqslant s\end{cases}$$

如果 $M_2=s$，则令

$$L_i=l_i-m_{M_1+i}\qquad 1\leqslant i\leqslant M_2$$

在情形 4.1 和情形 4.2 下，(11) 式可写成

$$\sum_{i=1}^{n+M_5}\frac{N_iz_i}{1+z_it}-\sum_{i=1}^{s}\frac{L_i\omega_i}{1+\omega_it}=o(t^{M+q(N+k)})\qquad t\to 0$$

其中 $0\leqslant M_5\leqslant m-2$. 根据情形 1 的方法，可得 $s\geqslant q(k+1)$.

定理 6 的证明　不妨设 $D=\{z:|z|<1\}$. 设 z_0 为 D 内任意一点，以下我们证明 $\mathscr{F}$ 在 z_0 处正规. 分 2 种情况考虑：

情形 1　若 $h(z_0)\neq 0$，不妨设 $h(z_0)=1$. 文献[11] 给出了此情形的证明.

情形 2　若 $h(z_0)=0$，不妨设 $z_0=0$，$h(z)=z^m+a_{m+1}z^{m+1}+\cdots=z^mb(z)$，其中 $m\geqslant 1$，$b(0)=1$，且当 $0<|z|<1$ 时 $h(z)\neq 0$. 令

$$\mathscr{H}=\left\{F:F(z)=\frac{f(z)}{z^m},\ f\in\mathscr{F}\right\}$$

因为对任意的 $f\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$，所以对任意的 $F\in\mathscr{H}$，$F(z)\neq 0$，且 0 是 F 的至少 m 重极点.

若 $\mathscr{H}$ 在 $z=0$ 处不正规，则由 Zalcman 引理知，存在点列 $\{z_n\}(z_n\to 0)$、正数列 $\{\rho_n\}(\rho_n\to 0^+)$、函数列 $\{F_n\}\subset\mathscr{H}$，使得

$$g_n(\xi)=\rho_n^{-k}F_n(z_n+\rho_n\xi)\to g(\xi)\qquad n\to\infty$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$.

以下再分 2 种情况讨论：

情形 2.1　存在 $\left\{\dfrac{z_n}{\rho_n}\right\}$ 的收敛子列，不妨设为 $\left\{\dfrac{z_n}{\rho_n}\right\}\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\alpha\right)$，$\alpha$ 为有限复数，令 $g_1(\xi)=g(\xi-\alpha)$，则

$$\frac{F_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^k}=\frac{F_n\left(z_n+\rho_n\left(\xi-\dfrac{z_n}{\rho_n}\right)\right)}{\rho_n^k}\to g(\xi-\alpha)=g_1(\xi)\qquad n\to\infty$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 $g_1(\xi)$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g_1(\xi)$，显然 $g_1(\xi)\neq 0$，且 0 是 $g_1(\xi)$ 的至少 m 重极点，令：

$$G_n(\xi)=\frac{f_n(\rho_n\xi)}{\rho_n^{k+m}}\qquad G(\xi)=\xi^mg_1(\xi)$$

则

$$G_n(\xi)=\frac{F_n(\rho_n\xi)(\rho_n\xi)^m}{\rho_n^{k+m}}\to\xi^mg_1(\xi)=G(\xi)\qquad n\to\infty$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上去掉 $g_1(\xi)$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $G(\xi)$，由于 0 是 $g_1(\xi)$ 的至少 m 重极点，可知 $G(0)\neq 0$.

另外，注意到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h(\rho_n\xi)}{\rho_n^m}=\xi^m\lim_{n\to\infty}b(\rho_n\xi)=\xi^m$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上的任意紧子集内一致收敛，因此

$$(G_n^{(k)}(\xi))^q-\frac{(h(\rho_n\xi))^q}{\rho_n^{mq}}=\frac{(f_n^{(k)}(\rho_n\xi))^q}{\rho_n^{mq}}-\frac{(h(\rho_n\xi))^q}{\rho_n^{mq}}\to(G^{(k)}(\xi))^q-\xi^{mq}\qquad n\to\infty$$

因为$(f_n^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ 在 $\Delta(0,\delta)=\{z:|z|<\delta\}$ 内至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点，所以$(G^{(k)}(\xi))^q-\xi^{mq}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点. 根据引理 4 知，$G(\xi)$ 为有理函数，这与引理 5 矛盾.

情形 2.2 存在$\left\{\dfrac{z_n}{\rho_n}\right\}$的收敛子列，不妨设为$\left\{\dfrac{z_n}{\rho_n}\right\}\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}\to\infty\right)$，经简单计算可得

$$F^{(k)}(z)=\frac{f^{(k)}(z)}{z^m}-\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}\frac{(z^m)^{(l)}F^{(k-l)}(z)}{z^m}=\frac{f^{(k)}(z)}{z^m}-\sum_{l=1}^{k}C_lF^{(k-l)}(z)\frac{1}{z^l}$$

其中

$$C_l=\begin{cases}\binom{k}{l}m(m-1)\cdots(m-l+1) & l\leqslant m\\ 0 & l>m\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}(F^{(k)}(z))^q=&\left(\frac{f^{(k)}(z)}{z^m}-\sum_{l=1}^{k}C_lF^{(k-l)}(z)\frac{1}{z^l}\right)^q=\\ &\frac{(f^{(k)}(z))^q}{z^{mq}}+\sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}(-1)^r\left(\sum_{l=1}^{k}C_lF^{(k-l)}(z)\frac{1}{z^l}\right)^r\left(\frac{f^{(k)}(z)}{z^m}\right)^{q-r}\end{aligned}\tag{17}$$

由(17)式及 $\rho_n^lg_n^{k-l}(\xi)=F_n^{(k-l)}(z_n+\rho_n\xi)$ 可得

$$\begin{aligned}(g_n^{(k)}(\xi))^q=&(F_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q=\\ &\frac{(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q}{(z_n+\rho_n\xi)^{mq}}+\sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}(-1)^r\left[\sum_{l=1}^{k}C_lg_n^{(k-l)}(\xi)\frac{1}{\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}+\xi\right)^l}\right]^r\left(\frac{f^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)}{(z_n+\rho_n\xi)^m}\right)^{q-r}\end{aligned}$$

即

$$\frac{(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q}{(z_n+\rho_n\xi)^{mq}}=(g_n^{(k)}(\xi))^q-\sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}(-1)^r\left[\sum_{l=1}^{k}C_lg_n^{(k-l)}(\xi)\frac{1}{\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}+\xi\right)^l}\right]^r\left(\frac{f^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)}{(z_n+\rho_n\xi)^m}\right)^{q-r}$$

因此

$$\frac{(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q}{(h(z_n+\rho_n\xi))^q}=\left[(g_n^{(k)}(\xi))^q-\sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}(-1)^r\left[\sum_{l=1}^{k}C_lg_n^{(k-l)}(\xi)\frac{1}{\left(\dfrac{z_n}{\rho_n}+\xi\right)^l}\right]^r\left(\frac{f^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)}{(z_n+\rho_n\xi)^m}\right)^{q-r}\right]\frac{1}{(b(z_n+\rho_n\xi))^q}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}b(z_n+\rho_n\xi)=1$，及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{z_n}{\rho_n}+\xi}=0$，所以

$$\frac{(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q-(h(z_n+\rho_n\xi))^q}{(h(z_n+\rho_n\xi))^q}\to(g^{(k)}(\xi))^q-1$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上除去 $g(\xi)$ 的极点后的区域内内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数.

因为 $F(z)\neq0$，且$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ 在 D 内至多只有 $q(k+1)-1$ 个不同零点，与情形 1 类似，可得$(g^{(k)}(\xi))^q-1$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 内至多只有 $q(k+1)-1$ 个不同零点. 且 $g(\xi)$ 既不是超越亚纯函数也不是有理函数，同时与"$g(\xi)$ 是非常数亚纯函数"矛盾. 所以 $\mathscr{H}$ 在 $z=0$ 处正规.

下面我们证明 $\mathscr{F}$ 在 $z=0$ 处正规. 因为 $\mathscr{H}$ 在 $z=0$ 处正规，且对任意的 $F\in\mathscr{H}$，有 $F(0)=\infty$，所以存在 $\delta>0$，当 $z\in\Delta(0,\delta)$ 时，对任意的 $F\in\mathscr{H}$，有 $|F(z)|\geqslant1$. 又因为对任意的 $f\in\mathscr{F}$，当 $z\in\Delta(0,\delta)$ 时，$f(z)\neq0$，所以$\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $z\in\Delta(0,\delta)$ 内全纯. 因此对任意的 $f\in\mathscr{F}$，有

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right|=\left|\frac{1}{F(z)}\frac{1}{z^m}\right|\leqslant\frac{2^m}{\delta^m}\qquad z\in\Delta\left(0,\frac{\delta}{2}\right)$$

由最大模原理及 Montel 正规定则，可得 $\mathscr{F}$ 在 $z=0$ 处正规. 则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

从定理 6 的证明过程容易得到：

定理 7 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，k,q 为正整数，$h(z)$ 为区域 D 内无零点的全纯函数，若对任意的 $f\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq0$，且$(f^{(k)}(z))^q-h(z)$ 至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点(不计重数)，那么 $\mathscr{F}$ 在 D 内

正规.

从而我们提出：

公开问题 1　设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k,q\geqslant 2$ 为正整数，$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数，若对任意的 $f\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$，且 $(f^{(k)}(z))^q-h(z)$ 至多有 $q(k+1)-1$ 个不同零点(不计重数)，那么 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

即便是特殊情形也未决：

公开问题 2　设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k,q\geqslant 2$ 为正整数，$h(z)$ 为区域 D 内不恒为 0 的全纯函数，若对任意的 $f\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$，且 $(f^{(k)}(z))^q\neq h(z)$，那么 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

参考文献：

[1] HAYMAN W K. Meromorphic Functions [M]. Oxford：Clarendon Press，1964.

[2] SCHIFF J. Normal Families [M]. Berlin：Springer-Verlag，1993.

[3] 顾永兴，庞学诚，方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京：科学出版社，2007.

[4] HAYMAN W K. Picard Values of Meromorphic Functions and Their Derivatives [J]. Ann Math，1959，70(1)：9－42.

[5] GU Y X. A Criterion for Normality of Families of Meromorphic Functions [J]. Sci Sin，1979(1)：267－274.

[6] YANG L. Normality for Families of Meromorphic Funnctions [J]. Sci Sin，1986，29(12)：1263－1274.

[7] CHANG J M. Normality and Quasinormality of Zero-Free Meromorphic Functions [J]. Acta Math Sin，2012，28(4)：707－716.

[8] DENG B M，FANG M L，LIU D. Normal Families of Zero-Free Meromorphic Functions [J]. J Austal Math Soc，2011，91：313－322.

[9] PANG X C，ZALCMAN L. Normal Families and Shared Values [J]. Bull London Math Soc，2000，32(3)：325－331.

[10] ZALCMAN L. Normal Families：New Perspectives [J]. Bull Amer Math Soc，1998，35(3)：215－230.

[11] 崔丽霞，陈鸿辉，李晓培，等. 涉及零点的非零亚纯函数的正规性 [J]. 岭南师范学院学报. 2017，38(3)：1－7.

[12] YAMANOI K. The Second Main Theorem for Small Functions and Related Problems [J]. Acta Math，2004，192(2)：225－294.

[13] BERGWEILER W，EREMENKO A. On the Singularities of the Inverse to a Meromorphic Functions of Finite Order [J]. Rev Mat Iberoamericana，2007，11(2)：115－125.

[14] BERGWEILER W，PANG X. On the Derivative of Meromorphic Functions with Multiple Zeros [J]. Math Anal Appl，2003，278(2)：285－292.

[15] PANG X C，YANG D G，ZALCMAN L. Normal Families of Meromorphic Function Whose Derivatives Omit a Function [J]. Comput Methods Funct Theory，2002，2(1)：257－265.

Normality Concerning Zero Numbers and Polynomial of Zero-Free Meromorphic Functions

CHEN Hong-hui，　CAI Jin-hua，　YUAN Wen-jun

School of Mathematics and Information Science，Guangzhou University，Guangzhou 510006，China

Abstract：In this paper，we have discussed the normality concerning zero numbers and polynomial of zero-free meromorphic functions and obtained the following result：Let $\mathscr{F}$ be a family of zero-free meromorphic functions in a domain D，let $h(z)$ be a holomophic functions in D，and let k，q be two positive integers. If，for each function $f\in\mathscr{F}$，$f(z)\neq 0$，$(f^{(k)}(z))^q-(h(z))^q$ has at most $q(k+1)-1$ distinct zeros(ignoring multiplicity) in D，then F is normal in D.

Key words：meromorphic functions；normality；zero numbers

责任编辑　*廖　坤　崔玉洁*