第 43 卷　第 8 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2018 年 8 月
Vol. 43　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug. 2018

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.004

分担集合的亚纯函数正规族[①]

吕凤姣[1]，　刘芝秀[2]

1. 黄河科技学院 信息工程学院，郑州 450063；2. 南昌工程学院 理学院，南昌 330099

摘要： 把亚纯函数正规族与分担值或分担集合结合起来考虑是亚纯函数正规族理论研究的一个重要课题. 目前正规族的相关理论在复动力系统、复微分方程和整函数唯一性等方面都有着重要的应用. 利用 Nevanlinna 理论研究一类涉及分担集合的亚纯函数族的正规性. 主要证明了如下的结论：设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数，$S_1=\{a_1, a_2, a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1, b_2, b_3\}$ 均为由 3 个互异的有限复数所构成的集合，如果对于任意的 $f(z)\in F$，有 $\{z\in D: f(z)\in S_1\}=\{z\in D: f'(z)\in S_2\}$，那么 $F=\{f(z)\}$ 在 D 内正规.

关　键　词： 亚纯函数；正规族；分担集合

中图分类号：O174.52　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2018)08-0018-05

亚纯函数族 F 在区域 D 上正规，是指对 F 中的任意函数列 $\{f_n(z)\}$ 都存在子列 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在区域 D 上按球面距离内闭一致收敛. 亚纯函数族 F 在 z_0 点正规，是指存在点 z_0 的邻域 $U(z_0)$，使得 F 在 $U(z_0)$ 上正规. 亚纯函数族 F 在区域 D 上正规等价于 F 在区域 D 上的每一点都正规[1].

文献[2]首先将正规族与函数的取值联系起来，建立了著名的 Montel 正规定则：

定理 1[2]　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一亚纯函数族，a_1, a_2, a_3 是扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上 3 个互异的复数，如果对任意的 $f\in F$，有 $f(z)\neq a_1, a_2, a_3$，则 F 在 D 内正规.

文献[3]进一步又将正规族和函数导数的取值联系起来，并建立了著名的 Gu 正规定则：

定理 2[3]　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一亚纯函数族，k 是正整数，a 是非零有穷复数，如果对任意的 $f\in F$，有 $f(z)\neq 0$，$f^{(k)}(z)\neq a$，则 F 在 D 内正规.

文献[4]将函数与其导数唯一性的条件即分担条件引入了正规族，建立了下面的定理 3：

定理 3[4]　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一亚纯函数族，a_1, a_2, a_3 是 3 个互异的有限复数，如果对任意的 $f\in F$，f 与 f' 同时分担值 a_1, a_2, a_3，其中 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 分担 a_i 是指 $\{z: f(z)=a_i\}=\{z: f'(z)=a_i\}$，则 F 在区域 D 内正规.

文献[5]推广了文献[4]的结果，并证明了分担集合的情况：

定理 4[5]　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一族全纯函数，$S=\{a_1, a_2, a_3\}$，其中 a_1, a_2, a_3 是 3 个互异的有限复数，如果对任意的 $f\in F$，有 $\{z: f(z)\in S\}=\{z: f'(z)\in S\}$，那么 F 在 D 内正规.

文献[6]又进一步将全纯函数族推广到了亚纯函数族，结论如下：

定理 5[6]　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数，$S=\{a_1, a_2, a_3\}$，其中 a_1, a_2, a_3 是 3 个互异的有限复数，如果对任意的 $f\in F$，有 $\{z: f(z)\in S\}=\{z: f'(z)\in S\}$，那么 F 在 D 内正规.

---

① 收稿日期：2017-09-05

基金项目：国家自然科学基金项目(U1304102)；郑州市科技局基金项目(20141375).

作者简介：吕凤姣(1983-)，女，讲师，主要从事复分析的研究.

本文继续探讨了与分担集合相关的正规族，证明了下面的结果：

定理 6　设 $F=\{f(z)\}$ 是区域 D 内的一亚纯函数族，$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2,b_3\}$ 分别是由 3 个互异的有限复数所构成的集合，如果对于任意的 $f(z)\in F$，有 $\{z\in D: f(z)\in S_1\}=\{z\in D: f'(z)\in S_2\}$，那么 F 在区域 D 内正规.

显然，当 $S_1=S_2$ 时的特殊情况即为定理 5 的结论.

下面举例说明定理 6 中集合 S_1 和 S_2 中元素的个数是不能减少的.

例 1　设 $D=\{z: |z|<1\}$，$S_1=\{1,-1\}$，$S_2=\{2,-2\}$，假设 $F=\{f_n: n=1,2,\cdots\}$，其中

$$f_n(z)=\frac{n+2}{2n}\mathrm{e}^{nz}+\frac{n-2}{2n}\mathrm{e}^{-nz}$$

那么就有 $n^2(f_n^2-1)=(f_n')^2-4$. 这就意味着满足条件

$$\{z\in D: f(z)\in S_1\}=\{z\in D: f'(z)\in S_2\}$$

但是，F 在区域 D 内是不正规的.

引理 1[7-9]　(Zalcman-Pang 引理) 设 F 是单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族，若对 $\forall f\in F$ 和 $f(z)=0$，存在正数 A，使得 $|f'(z)|\leqslant A$. 那么，如果 F 不正规，则对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，就存在：

(ⅰ) 实数 $0<r<1$；

(ⅱ) 复数列 $\{z_n\}(|z_n|<r)$；

(ⅲ) 函数列 $\{f_n\}\subset F$；

(ⅳ) 正数列 $\{\rho_n\}(\rho_n\to 0^+)$.

使得 $g_n(\zeta)=\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}}$ 按球面距离内闭一致收敛于 $g(\zeta)$，其中 $g(\zeta)$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数有穷级亚纯函数，其球面导数

$$g^{\#}(\zeta)=\frac{|g'(\zeta)|}{1+|g(\zeta)|^2}\leqslant g^{\#}(0)=A+1$$

引理 2[10-12]　设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_q$ 是 $q(>2)$ 个互异的扩充复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的复数，那么有

$$(q-2)T(r,f)<\sum_{v=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_v}\right)-N_1(r)+S(r,f)$$

其中：

$$N_1(r)=2N(r,f)-N(r,f')+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\qquad S(r,f)=o(T(r,f))\qquad r\to\infty$$

对于至多除去 1 个测度为有穷的集合 E 外成立.

定理 6 的证明

假设 F 在 D 上不正规，由引理 1 知，存在一复数列 $\{z_n\}(|z_n|<1)$、函数列 $\{f_n\}\subset F$ 和正数列 $\{\rho_n\}(\rho_n\to 0)$，使得 $g_n(\zeta)=g_n(z_n+\rho_n\zeta)\to g(\zeta)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上是按球面距离内闭一致收敛的，其中 $g(\zeta)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数. 那么由 $g(\zeta)\in S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 可以推出 $g'(\zeta)=0$ 成立. 事实上，假设存在 $\zeta_0\in\mathbb{C}$ 使得 $g(\zeta_0)\in S_1$，那么存在某个 $i\in\{1,2,3\}$，使得 $g(\zeta_0)=a_i$. 由于 $g(\zeta)$ 不恒等于 a_i，根据 Hurwitz 定理可得，存在 $\{\zeta_n\}(\zeta_n\to\zeta_0)$，使得 $g_n(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a_i$.

由已知的分担条件

$$\{z\in D: f(z)\in S_1\}=\{z\in D: f'(z)\in S_2\}$$

可知 $f_n'(z_n+\rho_n\zeta_n)\in S_2$ 成立，这就意味着存在 $A=\max\{|b_1|,|b_2|,|b_3|\}$，使得

$$|f'_n(z_n+\rho_n\zeta_n)|\leqslant A$$

那么就有

$$g(\zeta_0)=\lim_{n\to\infty}\rho_n f'_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$$

因为 $g(\zeta)$ 不是常值函数，根据毕卡定理可得，$g(\zeta)$ 必定可以取到 $S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ 中的某个数，那么不妨设 $g(\zeta)-a_1$ 在 $\mathbb{C}$ 上有零点.

下面考虑函数 $G_n(\zeta)=\dfrac{g_n(\zeta)-a_1}{\rho_n}$.

可以断言 $\{G_n\}$ 在 $g(\zeta)-a_1$ 的零点处不正规. 事实上：一方面，如果假设 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的某个零点，那么由 $g(\zeta)-a_1$ 不恒等于 0，故存在一列 $\{\zeta_n\}(\zeta_n\to\zeta_0)$，使得

$$g_n(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)=a_1$$

这样的话就有 $G_n(\zeta_n)=0$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(\zeta_n)=0$ 成立；另一方面，又存在正数 δ，使得 $g(\zeta)\neq a_1$ 在 $0<|\zeta-\zeta_0|<\delta$ 上成立，那么对于任意的 ζ，只要 $0<|\zeta-\zeta_0|<\delta$ 成立，当 n 充分大时，就有 $g_n(\zeta)\neq a_1$ 成立，这样就有 $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(\zeta)=\infty$，这说明了 $\{G_n\}$ 在点 ζ_0 处不正规.

由于 $\{G_n\}$ 在点 ζ_0 处不正规，由定理 1 知，存在复数列 $\{\zeta_n\}(\zeta_n\to\zeta_0)$、函数列 $\{G_n\}$、正数列 $\eta_n(\eta_n\to0^+)$，使得

$$F_n(\zeta)=\frac{G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)}{\eta_n}=\frac{g_n(\zeta_n+\eta_n\xi)-a_1}{\rho_n\eta_n}\to F(\xi)\qquad n\geqslant\infty$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛，其中 F 是 $\mathbb{C}$ 上的非常值有穷级亚纯函数，并且满足 $F^{\#}(\xi)\leqslant F^{\#}(0)$.

可以断言：(ⅰ)F 仅有有限多个不同的零点；

(ⅱ)$F(\xi)=0\Leftrightarrow F'(\xi)\in S_2=\{b_1,b_2,b_3\}$.

事实上，假设 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的 k 级零点，如果至少存在 $k+1$ 个互不相同的点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k+1}$，满足 $F(\xi_j)=0(j=1,2,\cdots,k+1)$，因为 $F(\xi)$ 不恒等于 0，则由 Hurwitz 定理可得，存在正整数 N，使得对于任意的 $n>N$，有 $F_n(\xi_{n_j})=0(j=1,2,\cdots,k+1)$. 那么有：

$$g_n(\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j})-a_1=0\qquad \zeta_n+\eta_n\xi_{n_j}\to\zeta_0\qquad n\to\infty,\ j=1,2,\cdots,k+1$$

因此 ζ_0 是 $g(\zeta)-a_1$ 的重级至少为 $k+1$ 的零点，这与假设相矛盾. 所以，断言(ⅰ)是成立的.

关于断言(ⅱ)的证明. 一方面，如果存在 $\xi_0\in\mathbb{C}$，使得 $F(\xi_0)=0$，由于 $F(\xi)$ 不恒等于 0，则根据 Hurwitz 定理知，存在一列 $\{\xi_n\}(\xi_n\to\xi_0)$，使得

$$F_n(\xi_n)=\frac{f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n\eta_n}=0$$

这就表明了

$$f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1$$

由已知的条件假设有

$$f'_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_2$$

可取 f_n 的子列使得

$$f'_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=b_i$$

则有

$$F'(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}f'_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_2$$

另一方面，如果存在某个 $\xi_0\in\mathbb{C}$，使得 $F'(\xi_0)\in S_2$，也就是说存在某个 $b_i\in S_2$，使得 $F'(\xi)=b_i$. 又因为 $F'(\xi)$ 不恒等于 b_i，则由 Hurwitz 定理知，存在一列 $\{\xi_n\}(\xi_n\to\xi_0)$，使得

$$F'_n(\xi_n)=f'_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=b_i$$

那么可得 $f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\in S_1$，如果存在正整数 N，使得对于每个 $n>N$，有

$$f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))\neq a_1$$

则

$$F(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n\eta_n}=\infty$$

这就与 $F'(\xi_0)=b_i$ 相矛盾．所以，一定存在$\{f_n\}$ 的子列(不妨仍记为$\{f_n\}$)，使得对于每个 n，都有

$$f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))=a_1$$

所以

$$F(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n))-a_1}{\rho_n\eta_n}=0$$

下面对 $F'(\xi)$ 使用定理 2，并取 $q=4$，注意到断言(ⅱ)，可得

$$2T(r,F'(\xi))\leqslant\overline{N}(r,F'(\xi))+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F'(\xi)-b_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F'(\xi)-b_2}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F'(\xi)-b_3}\right)+S(r,F'(\xi))=$$
$$\overline{N}(r,F(\xi))+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)+S(r,F'(\xi))\qquad(1)$$

因为 $F(\xi)$ 是非常值的有穷级亚纯函数，所以 $F'(\xi)$ 与 $F(\xi)$ 具有相同的级，故有 $S(r,F'(\xi))=O(\ln r)$．此外，$F(\xi)$ 仅有有限多个零点，那么 $\overline{N}\left(r,\frac{1}{F(\xi)}\right)=O(\ln r)$，因此可得：

$$2T(r,F'(\xi))<\overline{N}(r,F(\xi))+O(\ln r)\qquad T(r,F'(\xi))<O(\ln r)$$

这就意味着 $F(\xi)$ 是有理函数．

因为 G_n 在 $g(\zeta)-a_1$ 的零点 ζ_0 处不正规，所以 G_n 在 ζ_0 的某个邻域内是全纯函数族(只要 n 充分大就可以)，这就意味着 $F_n(\xi)=\frac{G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)}{\eta_n}$ 在半径 R 趋向于无穷的圆盘 $D_R=\{\xi:|\xi|<R\}$ 内是全纯的．因为 $F_n(\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上按照球面距离内闭一致收敛到 $F(\xi)$，所以 $F(\xi)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数．那么，F 就是次数为 p 的多项式．

假设

$$F(\xi)=c_0\xi^p+c_1\xi^{p-1}+\cdots+c_p$$

其中 $c_i(i=0,1,2,\cdots,p)$ 是复数且 $c_0\neq0$．所以当 $r\to\infty$ 时，有：

$$T(r,F')=(p-1)(\ln r)\qquad N\left(r,\frac{1}{F}\right)=p(\ln r)\qquad S(r,F')=O(1)$$

代入(1) 式可得

$$2(p-1)(\ln r)\leqslant p(\ln r)+O(1)\qquad r\to\infty$$

则 $p\leqslant2$．如果 $p=1$，那么 $F(\xi)$ 是线性函数．不妨设 $F(\xi)=c\xi+d$，其中 $c(\neq0)$ 和 d 是有限复数，则 $F'(\xi)\equiv c$．如果 $c\in S_2$，由断言(ⅱ)得 $F(\xi)\equiv0$，矛盾；如果 $c\notin S_2$，由断言(ⅱ)得 $F(\xi)\neq0$，也发生矛盾．

如果 $p=2$，假设

$$F(\xi)=c(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)$$

其中 $c\neq0$，则有 $F'(\xi)=c(2\xi-\xi_0-\xi_1)$ 成立，且$\frac{b_i+c(\xi_0+\xi_1)}{2c}$ 是 $F'(\xi)-b_i$ 的零点，所以$\frac{b_i+c(\xi_0+\xi_1)}{2c}$ $(i=1,2,3)$ 是不同的 3 个点．由断言(ⅱ)得，$F(\xi)$ 有 3 个不同的零点，与 $F(\xi)$ 仅有 2 个零点矛盾．综上所述，定理 6 得证．

参考文献：

[1]　顾永兴，庞学诚，方明亮．正规族理论及其应用［M］．北京：科学出版社，2016．

[2]　顾永兴．亚纯函数的正规族［M］．成都：四川教育出版社，1991．

[3] 顾永兴. 亚纯函数族的一个正规定则[J]. 中国科学,1979(1):269-276.

[4] SCHWICK W. Sharing Values and Normality [J]. Arch Math, 1992, 59(1): 50-54.

[5] FANG M L. A Note on Sharing Values and Normality [J]. Journal of Mathematica Study, 1996, 29(4): 29-32.

[6] 刘晓俊,庞学诚. 分担值与正规族[J]. 数学学报(中文版),2007,50(2):409-412.

[7] CHEN H H, GU Y X. Improvement of Marty's Criterion and Its Application [J]. Science in China(Ser A), 1993, 36(6): 674-681.

[8] PANG X C. Blochs Principle and Normal Criterion [J]. Sci in China(Ser A), 1989, 32(7): 782-791.

[9] 黄小杰,刘芝秀. 涉及分担值的一个正规定则[J]. 数学物理学报,2011,31(2):540-545.

[10] HAYMAN W K, WU S J. Value Distribution Theory and the Research of Yang Lo [J]. Science China(Mathematics), 2010, 53(3): 513-522.

[11] 谢 东,张 汉. 单向IM分担一个集的亚纯函数的正规性[J]. 西南大学学报(自然科学版),2011,33(2):118-120.

[12] 王 琼,陈 玮,袁文俊,等. 与零点个数有关的亚纯函数正规定则[J]. 数学物理学报,2017,37(1):7-17.

Normal Families of Meromorphic Functions Related to Shared Sets

LÜ Feng-jiao[1], LIU Zhi-xiu[2]

1. *Department of Information Engineering, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China;*

2. *Department of Science, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China*

Abstract: It is an important subject for the study of the normal family theory of meromorphic functions to combine the normal families of meromorphic functions with the shared values or the shared set. At present, the theory of normal families has important applications in complex dynamical systems, complex differential equations and the uniqueness of entire functions. Using Nevanlinna theory researched the shared sets of meromorphic function families. In this paper, it proves that, let $F=\{f(z)\}$ be a family of meromorphic functions on domain D, $S_1=\{a_1, a_2, a_3\}$ and $S_2=\{b_1, b_2, b_3\}$ be two sets with three distinct complex numbers. If for every $f(z)\in F$, $\{z\in D: f(z)\in S_1\}=\{z\in D: f'(z)\in S_2\}$, then $F=\{f(z)\}$ is normal on domain D.

Key words: meromorphic function; normal families; share sets

责任编辑 廖 坤 崔玉洁