第 43 卷 第 8 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 8 月
Vol. 43 No. 8 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Aug. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.005

拟双曲一致域与弱拟对称映射①

刘红军[1], 黄小军[2], 连 媛[2]

1. 贵州师范大学 数学科学学院,贵阳 550025;2. 重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331

摘要: 根据拟双曲一致域和拟对称映射的基本性质,利用拟双曲度量作为研究的重要工具,主要讨论了度量空间中拟双曲一致域的几何性质,同时刻画了拟双曲一致域在弱拟对称映射下仍然是保持不变的.

关 键 词: 拟双曲度量;拟双曲一致域;弱拟对称映射;不变性

中图分类号:O174.55 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2018)08-0023-04

在本文中,除特别说明外,X 和 Y 总表示度量空间,$G \subset X$ 和 $G' \subset Y$ 是两个子区域. 对于任意的 $x, y \in X$,x 和 y 之间的距离记为 $|x-y|$. 点 x 到 $X \backslash G$ 的距离记为 $\delta_G(x)$,即 $\delta_G(x) = \mathrm{dist}(x, X \backslash G)$. 任意 $x \in X$,$r > 0$,令

$$B(x, r) = \{y \in X: |y - x| < r\}$$

表示以 x 为心,r 为半径的开球.

拟对称映射的概念最早是由文献[1]提出来的. 文献[1]肯定地回答了直线上的拟对称自同胚正好是上半平面到自身的拟共形映射的边界映射. 拟对称映射的定义可参考文献[2],在此基础之上,文献[2]引入了弱(λ, H)-拟对称映射的概念.

定义 1[2] 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是同胚映射,如果存在常数 $\lambda > 0$ 和 $H \geqslant 1$,对于任意 3 个不同点 $x, a, b \in X$,当 $|x-a| \leqslant \lambda |x-b|$ 时,都有

$$|f(x) - f(a)| \leqslant H |f(x) - f(b)|$$

则映射 f 是弱(λ, H)-拟对称映射,或简称弱(λ, H)-QS 映射.

注 1 如果 $\lambda = 1$,则同胚映射 f 为弱 H-拟对称映射,或简称弱 H-QS 映射. 显然,η-QS 映射是弱 H-QS 映射,其中 $H = \eta(1)$.

20 世纪 80 年代,为了研究平面上函数的单射问题,文献[3]引入了一致域的概念,并取得了一些原始结果. 关于一致域的定义可以参考文献[4-8].

基于一致域的研究,文献[8]引入了拟双曲 φ-一致域的概念.

定义 2[8] 设 $G \subset X$ 是度量空间 X 中的子区域,$\varphi: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ 是递增的同胚映射,且 $\varphi(0) = 0$. 如果对任意的 $x, y \in G$,有

$$k_G(x, y) \leqslant \varphi\left(\frac{|x-y|}{\min\{\delta_G(x), \delta_G(y)\}}\right)$$

则称 G 为拟双曲 φ-一致域,或简称 QHφ-一致域.

---

① 收稿日期:2018-01-01
基金项目:贵州师范大学博士科研启动基金(11904/0517078);国家自然科学基金项目(11671057).
作者简介:刘红军(1987-),男,讲师,理学博士,主要从事复分析的研究.

注2 定义2中的 $k_G(\cdot,\cdot)$ 称为拟双曲度量，或简称QH度量[8-11].

文献[9]证明了Banach空间中一致域在拟莫比乌斯映射下仍然是保持不变的. 鉴于文献[9]中的结论，我们自然会考虑到如下的问题：在适合的度量空间中，QH φ-一致域在(λ, H)-拟对称映射下是否仍然保持不变？本文对该问题进行了讨论，并得到如下的结论：

定理1 设 X(或 Y)是 $c_1(c_2)$-拟凸的、紧的Proper度量空间和 λ-一致完全度量空间，而且 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 分别是两个子区域. 如果 G 是QH φ-一致域，同胚映射 $f: G\longrightarrow G'$ 是(λ, H)-QS映射，则 G' 也是QH φ_1-一致域，其中 φ_1 仅依赖于 φ, λ, H, c_1 和 c_2.

注3 (1°)定理1中拟凸度量空间与一般的凸度量空间是有区别的，参看文献[10-12]；

(2°)度量空间 X 称为Proper度量空间，是指 X 中的每一个闭球都是紧的；

(3°)若对任意的常数 $\lambda>1$，如果对于使得 $X\backslash B(x,r)\neq\varnothing$ 的开球 $B(x,r)$，都有 $B(x,r)\backslash B\left(x,\dfrac{r}{\lambda}\right)\neq\varnothing$，则 X 称为 λ-一致完全空间.

引理1[10] 设 X 是 c-拟凸和完备的度量空间，Y 是 c'-拟凸度量空间. 假如 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域，且同胚映射 $f: G\longrightarrow G'$ 是 H-QS映射，则存在递增的函数 $\phi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$，使得对于任意的 $x,y\in G$，有

$$k_{G'}(f(x), f(y))\leqslant\phi(k_G(x,y))$$

注意函数 ϕ 仅仅依赖于 H, c, c'，且当 $t\to 0$ 时，有 $\phi(t)\to 0$.

引理2[11] 设 X 是 c-拟凸度量空间，$G\subset X$ 是子区域. 假设 $x\in G$ 和 $0<s<\dfrac{1}{c}$. 如果 $|x-y|\leqslant s\delta_G(x)$，则有

$$k_{B_x}(x,y)\leqslant\frac{c}{1-sc}\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right)$$

其中 $B_x=B(x,\delta_G(x))$.

相对于拟双曲度量，还有距离商度量和相对度量所对应距离的定义，请参看文献[7]：

$$j_G(x,y)=\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\min\{\delta_G(x),\delta_G(y)\}}\right)\qquad r_G(x,y)=\frac{|x-y|}{\min\{\delta_G(x),\delta_G(y)\}}$$

引理3 设 X 和 Y 分别是 c_1 和 c_2-拟凸的、紧的Proper度量空间，且 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域. 如果同胚映射 $f: G\longrightarrow G'$ 是(λ, H)-QS映射，则对任意的 $x,y\in G$，有

$$\frac{j_G(x,y)-C}{M}\leqslant j_{G'}(f(x), f(y))\leqslant Mj_G(x,y)+C$$

其中 $M>0$ 和 $C>0$ 仅依赖于 η, c_1 和 c_2.

证 引理3的证明类似于文献[13]中的引理4.5，其中主要的改变在于将空间推广到了拟凸度量空间，以及将拟对称映射改成了弱拟对称映射.

证明主要结论之前，再介绍文献[2]中关于 η-QS映射与弱(λ, H)-QS映射等价性的结论：假设 X 是紧的 λ-一致完全度量空间，其中 $\lambda>1$，Y 是加倍度量空间. 则映射 $f: X\longrightarrow Y$ 是 η-QS映射当且仅当 f 是(λ, H)-QS映射.

定理1的证明 为了证明定理1的结论，对于任意的 $x,y\in G$，仅需要证明下列不等式：

$$k_{G'}(f(x), f(y))\leqslant\varphi_1\left(\frac{|f(x)-f(y)|}{\min\{\delta_{G'}(f(x)), \delta_{G'}(f(y))\}}\right)\tag{1}$$

在证明不等式(1)之前，我们有如下的断言：

存在递增函数 $\psi_1:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$，使得对于任意的 $x,y\in G$，有

$$\psi_1^{-1}(j_G(x,y))\leqslant j_{G'}(f(x), f(y))\leqslant\psi_1(j_G(x,y))\tag{2}$$

注意这里的函数 ψ_1 仅依赖于 λ, H, c_1 和 c_2，且当 $t\to 0$ 时，有 $\psi_1(t)\to 0$.

事实上，由于对称性，只需证明不等式(2)的右端即可．不失一般性，对于任意的 $x,y\in G$，不妨假设 $\delta_G(x)\leqslant\delta_G(y)$．下面对断言的证明分两种情形来讨论：

情形 1　$|x-y|\geqslant\frac{1}{2c_1}\delta_G(x)$．

由距离商度量的定义，可以得到

$$j_G(x,y)=\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\min\{\delta_G(x),\delta_G(y)\}}\right)\geqslant\ln\left(1+\frac{1}{2c_1}\right)$$

然后根据引理 3，存在常数 $M>0$ 和 $C>0$，使得对于任意的 $x,y\in G$，有

$$j_{G'}(f(x),f(y))\leqslant Mj_G(x,y)+C\leqslant\left(M+\frac{C}{\ln\left(1+\frac{1}{2c_1}\right)}\right)j_G(x,y)$$

不等式(2) 右端成立，其中

$$\psi_1(t)=\left(M+\frac{C}{\ln\left(1+\frac{1}{2c_1}\right)}\right)t$$

且当 $t\to 0$ 时，有 $\psi_1(t)\to 0$．

情形 2　$|x-y|\leqslant\frac{1}{2c_1}\delta_G(x)$．

令 $B_x=B(x,\delta_G(x))$．对于任意的 $x,y\in G$，结合 QH 度量的定义和引理 2，可得

$$k_G(x,y)\leqslant k_{B_x}(x,y)\leqslant 2c_1\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right)=2c_1j_G(x,y)$$

根据(λ,H)-QS 映射与 η-QS 映射是等价的，可以推出 $f:G\longrightarrow G'$ 是弱 H-QS 映射，其中 $H=\eta(1)$．再根据引理 1，存在的递增函数 $\phi:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$，使得对任意的 $x,y\in G$，有

$$j_{G'}(f(x),f(y))\leqslant k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant\phi(k_G(x,y))\leqslant\phi(2c_1j_G(x,y))$$

这就得到了不等式(2) 的右端，即 $\psi_1(t)=\phi(2c_1t)$．因此，(2) 式得证．

由(2) 式可知，存在递增函数 $\psi_1:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$，使得对于任意的 $x,y\in G$，有

$$j_G(x,y)\leqslant\psi_1(j_{G'}(f(x),f(y)))\tag{3}$$

定义函数 $\psi_2(t)=\varphi(\mathrm{e}^t-1)$．因为子区域 G 是 QH φ-一致域，再结合不等式(3) 及引理 1，可以得到

$$k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant\phi(k_G(x,y))\leqslant\phi\left(\varphi\left(\frac{|x-y|}{\min\{\delta_G(x),\delta_G(y)\}}\right)\right)\leqslant$$
$$\phi(\psi_2(j_G(x,y)))\leqslant\phi(\psi_2(\psi_1(j_{G'}(f(x),f(y)))))$$

因此，不等式(1) 成立，即子区域 G' 是 QH φ_1-一致域，其中

$$\varphi_1(t)=\phi\psi_2\psi_1(\ln(1+t))$$

参考文献：

[1] BEURLING A, AHLFORS L V. The Boundary Correspondence under Quasiconformal Mappings [J]. Acta Math, 1956, 96: 125－142.

[2] LI Y, YANG J. On the Equivalence of Weak Quasisymmetry and Quasisymmetry on Non-Connected Sets [J]. J Math Anal Appl, 2016, 435(2): 1400－1409.

[3] MARTIO O, SARVAS J. Injectivity Theorems in Plane and Space [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1979(4): 383－401.

[4] GEHRING F W, OSGOOD B G. Uniform Domains and the Quasihyperbolic Metric [J]. J Analyse Math, 1979, 36: 50－74.

[5] HUANG M, PONNUSAMY S, WANG X, et al. The Apollonian Inner Metric and Uniform Domain [J]. Math Nachr, 2010, 283: 1277－1290.

[6] MARTIO O. Definitions of Uniform Domains [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1980(5): 197－205.

[7] VÄISÄLÄ J. Uniform Domains [J]. Tohoku Math J, 1988, 40(1): 101-118.

[8] VÄISÄLÄ J. The Free Quasiworld: Freely Quasiconformal and Related Maps in Banach Spaces [J]. Quasiconformal Geometry and Dynamics, 1999, 48: 55-118.

[9] VÄISÄLÄ J. Free Quasiconformality in Banach Spaces II [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 1991, 16(2): 255-310.

[10] HUANG X J, LIU J S. Quasihyperbolic Metric and Quasisymmetric Mappings in Metric Spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 2015, 367(9): 6225-6246.

[11] HUANG X J, LIU H J, LIU J S. Local Properties of Quasihyperbolic Mappings in Metric Spaces [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2016, 41: 23-40.

[12] 曾秀华, 邓 磊. 一致凸度量空间的公共不动点定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(2): 69-73.

[13] XIE X D. Quasimöbius Maps Preserve Uniform Domains [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2006, 32(2): 481-495.

On Quasihyperbolic Uniform Domains and Weak Quasisymmetry Mappings

LIU Hong-jun[1], HUANG Xiao-jun[2], LIAN Yuan[2]

1. School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: Basing on the basic properties of quasihyperbolic uniform domains and quasisymmetric mappings, and using quasihyperbolic metric as main tool to study, the geometries of quasihyperbolic uniform domains in metric spaces have mainly been discussed, and the quasihyperbolic uniform domains invariance properties problem under weak quasisymmetric mappings been depicted.

Key words: quasihyperbolic metric; quasihyperbolic uniform domain; weak quasisymmetry; invariance property

责任编辑 廖 坤