DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.006

# $\mathbb{R}^N$ 中一类临界非局部问题的正解和无穷多对解[①]

伍君芬

重庆邮电大学 移通学院 数理教学部，重庆 合川 401520

**摘要**：研究如下一类带临界指数的非局部问题：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\mu|u|^{2^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

其中 $a\geqslant 0$，$b,\mu>0$，$N\geqslant 4$，$1\leqslant q\leqslant 2$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$，系数函数 $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ 满足一定的条件. 当 $1\leqslant q<2$，$N\geqslant 4$ 时，利用变分方法和临界点理论获得了该问题的无穷多对解；当 $q=2$，$N=4$ 时，利用山路引理获得了该问题的 1 个正解.

**关 键 词**：临界指数；非局部问题；无穷多解；临界点理论；山路引理

**中图分类号**：O176.3　**文献标志码**：A　**文章编号**：1000-5471(2018)08-0027-05

考虑如下临界非局部问题：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\mu|u|^{2^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N\geqslant 3$，$\mu,\lambda>0$，$1\leqslant q<2^*$，$a,b\geqslant 0$ 且 $a+b>0$. $2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ 为 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 嵌入 $L^s(\mathbb{R}^N)$（$s\in[1,2^*]$）的临界指数. $\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 的标准范数，$L^s(\mathbb{R}^N)$ 空间的标准函数为 $|u|_s=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^s\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$. $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数.

问题(1)中的非局部项 $b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x$ 使得方程不再是逐点意义下的相等，它起源于 Kirchhoff 研究的可伸缩的自由振动的经典的 D′Alembert 波动方程，因此问题(1)通常被称为 Kirchhoff 型问题. 十多年来，带临界指数的 Kirchhoff 型问题被人们广泛研究，如文献[1-9]. 当 $N=3$，$\mu=1$，$2<q<6$ 时，且当 $f\in L^{\frac{6}{6-q}}(\mathbb{R}^3)$ 为非零非负函数并满足一定条件时，文献[2]获得了问题(1)正基态解的存在性. 当 $1<q<2$ 时，文献[5,8]分别研究了三维空间和四维空间中的问题(1)，并获得了 2 个正解. 特别地，文献[3]研究了问题(1)当 $2\leqslant q<2^*$，$N\geqslant 4$ 且 $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ 为非零非负函数时的结论，当 $2<q<2^*$ 时，在

① 收稿日期：2018-04-02
基金项目：重庆邮电大学移通学院高等教育教学改革研究项目(YTJG201722)；四川省教育厅自然科学重点资助科研项目(18ZA0471).
作者简介：伍君芬(1976-)，女，讲师，主要从事非线性泛函分析的研究.

$0<\mu<\mu_*$ 且 $\lambda>0$ 充分大的条件下，获得了 2 个正解；当 $q=2$ 时，在 $0<\mu<\mu_*$ 且 $\lambda>0$ 充分大的条件下，获得了 1 个负能量正解；进一步，当 $a=0$，$N=4$，$2\leqslant q<4$ 且 $0<\mu<bS^2$ 时，对任意的 $\lambda>0$，还证明了问题(1) 有无穷多对不同的解.

受文献[3－5,8] 的启发，当 $N\geqslant 4$，$\lambda>0$ 且 $1\leqslant q\leqslant 2$ 时，我们研究问题(1) 的无穷多解，其中 $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ 满足一定条件. 当 $N\geqslant 4$，$1\leqslant q<2$ 时，利用临界点理论，我们获得了问题(1) 的无穷多对解；当 $N=4$，$q=2$，$\mu>bS^2$ 时，利用山路引理，我们获得了问题(1) 的 1 个正解. 本文补充了文献[3,8] 的结果.

定义问题(1) 对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N}f(x)|u|^q\mathrm{d}x\qquad \forall u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

显然，$I\in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$，且对任意的 $u,v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$，有

$$\langle I'(u),v\rangle=(a+b\|u\|^2)\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u,\nabla v)\mathrm{d}x-\mu\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*-2}uv\mathrm{d}x-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}f(x)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x$$

众所周知，问题(1) 的解与能量泛函 $I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上的临界点是一一对应的.

记 $S$ 为 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ 的最佳 Sobolev 常数，即

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}\tag{2}$$

为了获得了问题(1) 的无穷多对解，我们需要如下引理：

**引理 1**[1]　设 $X$ 为 Banach 空间，$I\in C^1(X,\mathbb{R})$ 为满足(PS) 条件的偶泛函，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\alpha<\beta$ 且 $I(0)<\alpha$(或 $I(0)>\beta$). 如果下面条件成立：

(ⅰ) 存在 $m$ 维线性子空间 $E\subset X$ 以及 $\rho>0$，使得 $\sup\limits_{t\in E\cap\partial B_\rho(0)}I(t)\leqslant\beta$，其中

$$\partial B_\rho(0)=\{t\in X:\ \|t\|=\rho\}$$

(ⅱ) 存在 $m$ 维线性子空间 $F\subset X$，使得 $\inf\limits_{t\in F^\perp}I(t)>\alpha$，其中 $F^\perp$ 为 $F$ 直交补空间；

(ⅲ) $m>j$.

则 $I$ 至少存在 $m-j$ 对不同的临界点.

根据文献[3] 中的引理 2.1，我们可以获得如下全局的(PS) 条件：

**命题 1**　假设 $1\leqslant q<2$，$a\geqslant 0$，$b$，$\lambda>0$，且 $\mu$ 满足以下条件：

$$\begin{cases}0<\mu<bS^2 & N=4\\ 0<\mu<\left(\dfrac{2a}{4-2^*}\right)^{\frac{4-2^*}{2}}S^{\frac{2^*}{2}}\left(\dfrac{2b}{2^*-2}\right)^{\frac{2^*-2}{2}} & N\geqslant 5\end{cases}$$

则能量泛函 $I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 内满足(PS) 条件.

下面给出本文的主要结果：

**定理 1**　假设 $f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ 且集合 $\{x\in\mathbb{R}^N:f(x)>0\}$ 具有正测度，$1\leqslant q<2$，则：

(ⅰ) 当 $N=4$，$a\geqslant 0$，$b,\lambda>0$ 且 $0<\mu<bS^2$ 时，问题(1) 有无穷多对不同的解；

(ⅱ) 当 $N\geqslant 5$，$a,b,\lambda>0$ 且 $0<\mu<\left(\dfrac{2a}{4-2^*}\right)^{\frac{4-2^*}{2}}S^{\frac{2^*}{2}}\left(\dfrac{2b}{2^*-2}\right)^{\frac{2^*-2}{2}}$ 时，问题(1) 有无穷多对不同的解.

**证**　为了证明定理 1，只需验证能量泛函 $I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 中满足引理 1 的条件. 显然，$I\in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N),\mathbb{R})$ 是偶泛函. 根据命题 1，$I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 内满足(PS) 条件. 令 $E=D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 且 $F=\{0\}$，

则 $F^{\perp}=D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. 我们断言存在充分小的 $\rho>0$，使得

$$\sup_{u\in E\cap\partial B_\rho(0)} I(u)\leqslant\beta<0=I(0) \tag{3}$$

其中

$$\partial B_\rho(0)=\{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N):\ \|u\|=\rho\}$$

事实上，记 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^N:\ f(x)>0\}$ 为正测度集. 对任意的 $\varepsilon>0$，必定存在闭集 $H$ 和开集 $G$，使得：

$$H\subset\Omega\subset G \qquad \operatorname{meas}(G-H)<\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性，可得 $\operatorname{meas} H>0$. 选取 $\hat{u}\in C^1(\mathbb{R}^N)$ 且 $0\leqslant\hat{u}\leqslant 1$，使得

$$\hat{u}(x)=\begin{cases}1 & x\in H\\ 0 & x\in\mathbb{R}^N\backslash G\end{cases}$$

显然，$\hat{u}\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. 根据 Hölder 不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|\hat{u}|^q\mathrm{d}x\geqslant&\int_H f(x)\mathrm{d}x-\int_{G-H}|f(x)||\hat{u}|^q\mathrm{d}x\geqslant\\ &\int_H f(x)\mathrm{d}x-\operatorname{meas}(G-H)\,|f|_{\frac{2^*}{2^*-q}}^{\frac{2^*}{2^*-q}}\geqslant\\ &\int_H f(x)\mathrm{d}x-\varepsilon\,|f|_{\frac{2^*}{2^*-q}}^{\frac{2^*}{2^*-q}}\geqslant\\ &\frac{1}{2}\int_H f(x)\mathrm{d}x>0\end{aligned}$$

选取

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{\int_H f(x)\mathrm{d}x}{2\,|f|_{\frac{2^*}{2^*-q}}^{\frac{2^*}{2^*-q}}},\ \frac{\operatorname{meas} G}{2}\right\}$$

使得：

$$\operatorname{meas} H\geqslant\frac{\operatorname{meas} G}{2}>0 \qquad \varepsilon\,|f|_{\frac{2^*}{2^*-q}}^{\frac{2^*}{2^*-q}}\leqslant\frac{1}{2}\int_H f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $1\leqslant q<2$，我们有

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(t\hat{u})}{t^q}=-\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|\hat{u}|^q\mathrm{d}x<0$$

这就意味着(3) 式成立. 进一步，根据 Hölder 不等式和(2) 式，可得

$$\begin{aligned}I(u)=&\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\mu}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{q}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\\ &\frac{a}{2}\|u\|^2+\frac{b}{4}\|u\|^4-\frac{\mu}{2^*S^{\frac{2^*}{2}}}\|u\|^{2^*}-\frac{\lambda}{q}|f|_{\frac{2^*}{2^*-q}}S^{-\frac{q}{2}}\|u\|^q\end{aligned} \tag{4}$$

由于 $1\leqslant q<2$，$N\geqslant 4$，$0<\mu<bS^2$，由(4) 式可得 $\inf\limits_{u\in F^{\perp}} I(u)>-\infty$. 因此，$I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 上满足命题 1 的条件. 从而，$I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 内有无穷多对不同的临界点. 即问题(1) 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 内有无穷多对不同的解. 定理 1 证毕.

下面，我们研究当 $q=2$，$N=4$ 时问题(1) 的正解，即

$$\begin{cases}-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\mu u^3+\lambda f(x)u & x\in\mathbb{R}^4\\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)\end{cases} \tag{5}$$

其中 $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为非零非负函数.问题(5)对应的能量泛函 $I$ 为

$$I(u) = \frac{a}{2}\|u\|^2 + \frac{b}{4}\|u\|^4 - \frac{\mu}{4}\int_{\mathbb{R}^4}|u|^4\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^4}f(x)|u|^2\mathrm{d}x \qquad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$$

设 $\lambda_1 > 0$ 为特征值问题 $-\Delta u = \lambda f(x)u$ 的第一个特征值,记为

$$\lambda_1 = \inf_{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^4} f(x)|u|^2\mathrm{d}x} \tag{6}$$

由文献[8]中的引理2.2.3,我们可得如下引理:

**引理2** 假设 $a,b>0$,$\mu > bS^2$,$0<\lambda<a\lambda_1$,以及 $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为非零非负函数,则能量泛函 $I$ 在空间 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中满足局部 $(\mathrm{PS})_c$ 条件,其中 $c < \frac{(aS)^2}{4(\mu-bS^2)} - D\lambda^2$,且 $D$ 仅与 $a,f$ 有关.

**证** 假设 $\{u_n\} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 为能量泛函 $I$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列.根据文献[8]中引理2.2.3的证明,我们只需证明 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中有界.事实上,根据 $(\mathrm{PS})_c$ 序列的定义和(6)式,由 $0<\lambda<a\lambda_1$ 可得

$$\begin{aligned} c + o(1) + \|u_n\| &\geqslant I(u_n) - \frac{1}{4}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \\ &\frac{a}{4}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}^4} f(x)|u_n|^2\mathrm{d}x \geqslant \\ &\frac{a\lambda_1 - \lambda}{4}\|u_n\|^2 \end{aligned}$$

这就意味着 $\{u_n\}$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中有界.引理2证毕.

类似于文献[8],记 $\phi(x) = \frac{8^{\frac{1}{2}}}{1+|x|^2}$ 为方程 $-\Delta u = u^3$ 的解,且 $\|\phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^4}\phi^4\mathrm{d}x = S^2$.于是,我们可得如下命题:

**命题2** 假设 $a,b>0$,$\mu > bS^2$,以及 $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为非零非负函数,则存在 $0<\lambda_*<\lambda_1$,使得对任意 $0<\lambda<\lambda_*$ 有 $\sup\limits_{t \geqslant 0} I(t\phi) = \frac{(aS)^2}{4(\mu-bS^2)} - D\lambda^2$.

**证** 参照文献[8]中引理2.2.4的证明即可得到命题2的结论.

从而,我们可以得到如下结论:

**定理2** 假设 $a,b>0$,$\mu > bS^2$,以及 $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为非零非负函数,则对任意 $0<\lambda<\lambda_*$ 问题(5)存在1个正的山路解 $u_*$,且 $I(u_*)>0$.

**证** 由假设可知 $I(0)=0$,0为泛函 $I$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中的局部极小值点.定义

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma}\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], D^{1,2}(\mathbb{R}^4)): \gamma(0)=0, \gamma(1)=t_0\phi\}$$

从而有 $c>0$.根据引理2和命题2,可知 $I$ 在 $D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$ 中满足山路定理的条件,从而存在 $u_* \in D^{1,2}(\mathbb{R}^4)$,使得 $I(u_*)=c>0$ 且 $I'(u_*)=0$.从而 $u_*$ 为问题(5)的非零解.根据解的定义,由 $\langle I'(u_*), u_*^-\rangle = 0$,可得 $\|u_*^-\|=0$,其中 $u_*^- = \max\{-u_*, 0\}$,从而 $u_* \geqslant 0$.再根据强极大值原理,可得 $u_*$ 为问题(5)的正解.

## 参考文献:

[1] CHANG K C. Methods in Nonlinear Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
[2] LEI C Y, SUO H M, CHU C M, et al. On Ground State Solutions for a Kirchhoff Type Equation with Critical Growth [J]. Comput Math Appl, 2016, 72(3): 729-740.
[3] LI H Y, LIAO J F. Existence and Multiplicity of Solutions for a Superlinear Kirchhoff-Type Equations with Critical Sobolev Exponent in $\mathbb{R}^N$[J]. Comput Math Appl, 2016, 72(12): 2900-2907.

[4] LIU J，LIAO J F，TANG C L. Positive Solutions for Kirchhoff-Type Equations with Critical Exponent in $\mathbb{R}^N$[J]. J Math Anal Appl，2015，429(2)：1153－1172.

[5] 刘选状，吴行平. 两类带有临界指数的 Kirchhoff 型方程的解的存在性和多重性[D]. 重庆：西南大学，2015.

[6] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four[J]. J Differential Equations，2014，257(4)：1168－1193.

[7] 唐榆婷，唐春雷. 一类带 Hardy-Sobolev 临界指数的 Kirchhoff 方程正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：81－86.

[8] 朱同亮，吴行平. 两类带有临界指数的 Kirchhoff 型方程的解的存在性和多重性[D]. 重庆：西南大学，2016.

[9] 廖家锋，李红英. 带 Sobolev 临界指数的超线性 Kirchhoff 型方程正解的存在性与多解性[J]. 数学物理学报，2017，37A(6)：1119－1124.

# Positive Solutions and Infinity Many Pairs Distinct Solutions for a Critical Nonlocal Problems in $\mathbb{R}^N$

WU Jun-fen

*Department of Scientific Education，Collage of Mobile Telecommunications，*

*Chongqing University of Posts and Telecom，Hechuan Chongqing 401520，China*

**Abstract**：In this article，we consider a class of nonlocal problem with critical growth

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u=\mu|u|^{2^*-2}u+\lambda f(x)|u|^{q-2}u & x\in\mathbb{R}^N \\ u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where $a\geqslant 0$，$b,\mu>0$，$N\geqslant 4$，$1\leqslant q\leqslant 2$，$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$，$f\in L^{\frac{2^*}{2^*-q}}(\mathbb{R}^N)$ satisfies some certain conditions. When $1\leqslant q<2$，$N\geqslant 4$，infinitely many pairs solutions are obtained by the critical point theorem；while $q=2$，$N=4$，by using the Mountain Pass Lemma，one positive solution is obtained.

**Key words**：critical exponent；nonlocal problem；infinitely many solutions；critical point theorem；Mountain Pass Lemma

**责任编辑**　廖　坤　崔玉洁