第 43 卷　第 8 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2018 年 8 月
Vol. 43　No. 8　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Aug.　2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.007

一类解析 Toeplitz 算子的约化子空间与群的特征①

许安见[1]，　邹　杨[2]

1. 重庆理工大学 理学院，重庆 400054；2. 重庆第二师范学院 数学与信息工程学院，重庆 400067

摘要： 设 $\mathbb{A}_r$ 为复平面中的圆环 $\{z: r<|z|<1\}$，$L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 为 $\mathbb{A}_r$ 上的 Bergman 空间．从局部逆的代数结构的新视角研究解析 Toeplitz 算子的约化子空间．首先证明 $L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 上 Toeplitz 算子 T_{z^N} 的交换子的表示，再次证明 z^N 的全体局部逆组成的集合在复合映射下是循环群，最后证明了循环群的特征与 Toeplitz 算子 T_{z^N} 的极小约化子空间是一一对应的．

关　键　词： 圆环；Bergman 空间；约化子空间；特征

中图分类号： O177.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2018)08-0032-05

设 $\mathbb{D}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘，$\mathrm{d}A(z)$ 表示 $\mathbb{D}$ 上的规范化面积测度，$L^2(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 上平方可积函数全体，Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 由 $L^2(\mathbb{D})$ 中全体解析函数组成，$L^\infty(\mathbb{D})$ 为 $\mathbb{D}$ 上的本性有界的函数全体，$H^\infty(\mathbb{D})$ 为 $L^\infty(\mathbb{D})$ 中解析函数全体．对每个函数 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，可通过 $T_\varphi f=P(\varphi f)$ 定义 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的 Toeplitz 算子，这里的 P 为 $L^2(\mathbb{D})$ 到 $L_a^2(\mathbb{D})$ 的正交投影．若 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{D})$，则 Toeplitz 算子 T_φ 就是乘法算子，也称为解析 Toeplitz 算子．对 $0<r<1$，$\mathbb{A}_r$ 表示复平面中的圆环

$$\{z\in\mathbb{C}: r<|z|<1\}$$

类似地，我们可定义 $\mathbb{A}_r$ 上的 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 以及其上的 Toeplitz 算子．

算子的不变子空间和约化子空间是算子理论研究的核心问题，很多著名的数学家都在此方面做出了一些重要研究．由于 Bergman 位移的万有性质，算子理论学家开始研究单位圆盘 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子．文献[1]研究了单位圆盘 Bergman 空间上以二阶 Blaschke 乘积为符号的 Toeplitz 算子的约化子空间．文献[2]研究了以二阶 Blaschke 乘积为符号的 Toeplitz 算子的约化子空间，给出了极小约化子空间的全体刻画，并由此猜测以有限阶 Blaschke 乘积为符号的 Toeplitz 算子的极小约化子空间的个数等于该 Blaschke 乘积的阶数．文献[3-7]也对此做出了重要工作，但对多连通区域上的 Bergman 空间的 Toeplitz 算子的约化子空间问题研究很少．文献[8]利用级数展开，给出了圆环上 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 上解析 Toeplitz 算子 T_{z^N} 的交换子的表达式，由此具体地给出了 T_{z^N} 的全部极小约化子空间．本文首先刻画与 T_{z^N} 交换的酉算子，然后利用群的特征给出 T_{z^N} 的极小约化子空间的刻画，给出了文献[8]的结果的新证明，也是从 z^N 的局部逆群的角度研究 T_{z^N} 约化子空间的新尝试．

用 N 表示一正整数，$\rho_k(z)=w_i z$ 表示 z^N 的局部逆，其中

$$w_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{N}}\qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

是 1 的开 n 次方的第 k 个根．我们用 $\beta_0(w),\beta_1(w),\cdots,\beta_{N-1}(w)$ 表示 $w=z^N$ 在 $A_{\frac{1}{r^N}}$ 上的 N 个逆，显然 β_i (1 ⩽

---

① 收稿日期：2018-02-26

基金项目：重庆市自然科学基金项目(CSTC2015jcyjA00045)，国家自然科学基金项目(11501068)．

作者简介：许安见(1978-)，男，副教授，博士，主要从事算子理论的研究．

$i \leqslant N$）在$\overline{A_r}$ 的某邻域上解析. 且在 A_r 上，显然有 $\rho_k(z) = (\beta_{j+k} \circ \beta_j^{-1})(z)$，其中

$$\beta_{j+k} = \beta_l \qquad j + k = l (\bmod N)$$

Blaschke 乘积的局部逆在研究单位圆盘 Hardy 空间与 Bergman 空间上的解析 Toeplitz 算子的结构时有着重要作用[9]. 文献[10－11]为研究有限 Blaschke 乘积的分解，详细研究了有限 Blaschke 乘积的局部逆的代数结构.

引理 1[5] 假设 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的向量 $\boldsymbol{u}_\lambda^k, \boldsymbol{v}_\mu^k (1 \leqslant k \leqslant N; \lambda, \mu \in \Lambda)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_\lambda^k \otimes \boldsymbol{v}_\lambda^k = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_\mu^k \otimes \boldsymbol{v}_\mu^k \qquad \lambda, \mu \in \Lambda$$

则存在酉矩阵 $\boldsymbol{M} \in M_n(\mathbb{C})$，使得

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_\lambda^1, \cdots, \boldsymbol{u}_\lambda^N)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{v}_\mu^1, \cdots, \boldsymbol{v}_\lambda^N)^{\mathrm{T}} \qquad \lambda \in \Lambda$$

命题 1 对每个与 T_{z^N} 交换的酉算子 U，存在单位向量$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$，使得对任何 $f \in L_a^2(\mathbb{A}_r)$，有

$$Uf(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k w_k f(\rho_k(z))$$

证 $L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 是再生核 Hilbert 空间，K_λ 表示在$\lambda \in \mathbb{A}_r$ 处的再生核. 设 U 是与 T_{z^N} 交换的酉算子. 则对任何 $\lambda, \mu \in \mathbb{A}_r$，有

$$\langle z^N K_\lambda, z^N K_\mu \rangle = \langle UT_{z^N} K_\lambda, UT_{z^N} K_\mu \rangle = \langle T_{z^N}(UK_\lambda), T_{z^N}(UK_\mu) \rangle$$

因为 $UT_{z^N} = T_{z^N} U$，从而对任何极点在 $\mathbb{A}_r$ 外的有理函数 Q_1, Q_2，有

$$\langle Q_1(z^N) K_\lambda, Q_2(z^N) K_\mu \rangle = \langle Q_1(z^N)(UK_\lambda), Q_2(z^N)(UK_\mu) \rangle$$

即

$$\int_{\mathbb{A}_r} (Q_1 \overline{Q_2})(z^N)\ K_\lambda(z) K_\mu(z) \mathrm{d}A(z) = \int_{\mathbb{A}_r} (Q_1 \overline{Q_2})(z^N)(UK_\lambda) \overline{(UK_\mu)} \mathrm{d}A(z)$$

对任何 $\mathbb{A}_r$ 上的连续函数 f，有

$$\int_{\mathbb{A}_r} f(z^N) K_\lambda(z) K_\mu(z) \mathrm{d}A(z) = \int_{\mathbb{A}_r} f(z^N)(UK_\lambda) \overline{(UK_\mu)} \mathrm{d}A(z) \tag{1}$$

因为连续函数可由有理函数逼近. 因此由控制收敛定理知，(1) 式对 $f \in L^\infty(\mathbb{A}_r)$ 也成立. 因 $r < 1$，故 $r^N < r < 1$，从而 z^N 将 A_r 映射到 $A_{r^N} \supset A_r$，故

$$\int_{A_{r^{\frac{1}{N}}}} f(z^N)(z) K_\lambda(z) K_\mu(z) \mathrm{d}A(z) = \int_{A_{r^{\frac{1}{N}}}} f(z^N)(UK_\lambda) \overline{(UK_\mu)} \mathrm{d}A(z)$$

由变量代换 $w = z^N$，得

$$\int_{A_{r^{\frac{1}{N}}}} f(w) \sum_{i=1}^{N} K_\lambda(\beta_i(w)) K_\mu(\beta_i(w)) \mid \beta'_i(w) \mid^2 \mathrm{d}A(w) =$$

$$\int_{A_{r^{\frac{1}{N}}}} f(w) \sum_{i=1}^{N} (UK_\lambda)(\beta_i(w)) \overline{(UK_\mu)}(\beta_i(w)) \mid \beta'_i(w) \mid^2 \mathrm{d}A(z)$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} K_\lambda(\beta_i(w)) K_\mu(\beta_i(w)) \mid \beta'_i(w) \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} (UK_\lambda)(\beta_i(w)) \overline{(UK_\mu)}(\beta_i(w)) \mid \beta'_i(w) \mid^2 \qquad w \in A_{r^{\frac{1}{N}}}$$

这意味着 $\sum_{i=1}^{n} K_\lambda(\beta_i(w)) \beta'_i(w) \otimes K_\mu(\beta_i(w)) \beta'_i(w)$ 和 $\sum_{i=1}^{n} (UK_\lambda)(\beta_i(w)) \beta'_i(w) \otimes (UK_\mu)(\beta_i(w)) \beta'_i(w)$ 的 Berezin 变换相等，因此

$$\sum_{i=1}^{n} K_\lambda(\beta_i(w)) \beta'_i(w) \otimes K_\mu(\beta_i(w)) \beta'_i(z) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (UK_\lambda)(\beta_i(z)) \beta'_i(w) \otimes (UK_\mu)(\beta_i(z)) \beta'_i(w) \qquad \lambda \in A_{r^{\frac{1}{N}}}$$

由引理 1，则存在酉矩阵 $\boldsymbol{W} \in M_n(\mathbb{C})$，使得

$$\boldsymbol{W}\begin{pmatrix} K_\lambda(\beta_1(w))\beta'_1(w) \\ \vdots \\ K_\lambda(\beta_n(w))\beta'_n(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (UK_\lambda)(\beta_1(w))\beta'_1(w) \\ \vdots \\ (UK_\lambda)(\beta_n(w))\beta'_n(w) \end{pmatrix}$$

即存在单位向量 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_n)$，使得

$$(UK_\lambda)(\beta_1(w))\beta'_1(w) = \sum_{i=1}^{N} c_i K_\lambda(\beta_i(w))\beta'_i(w)$$

从而对任何 $f \in L_a^2(A_{r^{\frac{1}{N}}})$，有

$$(Uf)(\beta_1(w))\beta'_1(w) = \sum_{i=1}^{N} c_i f(\beta_i(w))\beta'_i(w)$$

因此由变量代换 $z = \beta_1(w)$ 以及 $\rho_k(z) = (\beta_k \circ \beta_1^{-1})(z)$，有

$$(Uf)(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(\rho_i(z))\rho'_i(z)$$

对任何 ρ_i，$0 \leqslant k < N$，定义算子

$$(E_k f)(z) = f(\rho_k(z))w_k \qquad f(z) \in L_a^2(\mathbb{A}_r)$$

因为 T_{z^N} 的双交换子是一个 Von Neumann 代数，且 Von Neumann 代数中的每个元素可表示成它的酉算子的线性组合，因此交换子中的投影是 E_i 的线性组合，因此 T_{z^N} 的双交换子代数是 N 维的. 因对 $0 \leqslant k, j \leqslant N-1$，$E_k$ 与 E_j 交换，T_{z^N} 的双交换子全体是交换 Von Neumann 代数，每个 Von Neumann 代数由它的极小投影生成，因此交换子 Von Neumann 代数有且仅有 N 个极小投影. 即 T_{z^N} 有且仅有 N 个极小约化子空间. 我们将用 z^N 的局部逆的表示给出 T_{z^N} 的全部极小约化子空间.

命题 2 对每个与 T_{z^N} 交换的酉算子 U，存在单位向量 $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$，使得

$$U = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k$$

命题 3 $E_k E_j = E_j E_k = E_r$，其中 $r \equiv k + j \pmod N$. 进一步地，$\{E_k\}_{k=0}^{n}$ 在算子乘法下构成一个循环群.

证 因

$$\rho_k \circ \rho_j = \rho_j \circ \rho_k = \rho_r(z)$$

其中 $k + j \equiv r \pmod N$，则对 $f(z) \in L_a^2(\mathbb{A}_r)$，有

$$\begin{aligned}(E_k E_j f)(z) = & E_k w_j f(\rho_j(z)) = w_j(\rho_k(z)) f(\rho_j \circ \rho_k(z)) w_k = \\ & (w_j w_k(z)) f(\rho_j \circ \rho_k(z)) = (E_j E_k f)(z)\end{aligned}$$

显然有 $E_0 = I$，因此 $\{E_i\}_{i=0}^{N}$ 是一个循环群.

命题 4 $E_k^* = E_j$，这里 $k + j \equiv 0 \pmod N$，因此 E_k 是酉算子.

证 对任何 $f(z), g(z) \in L_a{}^2(\mathbb{A}_r)$，有

$$\begin{aligned}\langle E_k^* f(z), g(z)\rangle = & \langle f(z), E_k g(z)\rangle = \langle f(z), w_k g(\rho_k(z))\rangle = \\ & \int_{\mathbb{A}_r} f(z)\overline{w_k}\,\overline{g(\rho_k(z))}\mathrm{d}A(z) = \\ & \int_{\mathbb{A}_r} f(\rho_j(w))\overline{w_k(\rho_j(w))g(\rho_k(\rho_j(w)))}\,|w_j|^2 \mathrm{d}A(w) = \\ & \int_{\mathbb{A}_r} f(\rho_j(w))\overline{w_k(\rho_j(w))w_j}w_j\,\overline{g(w)}\mathrm{d}A(w) = \\ & \int_{\mathbb{A}_r} f(\rho_j(w))w_j\overline{g(w)}\mathrm{d}A(w) = \langle E_j f(w), g(w)\rangle\end{aligned}$$

进一步地，$E_k^* E_k = E_j E_k = I$，其中 $k + j \equiv 0 \pmod N$. 类似地，$E_k E_k^* = I$，因此 E_k 是酉算子.

注意到，一般地，E_k 不是酉算子.

命题 5　对循环群$\{\rho_k\}_{k=0}^{N-1}$ 的每个特征 χ，算子

$$P_\chi = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\chi(\rho_k)E_k$$

是一个与 E_k 和 E_k^* 交换的算子.

证　因 χ 是循环群$\{\rho_k\}_{k=0}^{N-1}$ 的特征，显然有 $\chi(\rho_k) = \overline{\chi(\rho_j)}$，其中 $k+j\equiv 0(\mathrm{mod}\ N)$. 这意味着

$$P_\chi^* = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{\chi(\rho_k)}E_k^* = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\rho_j)E_j = P_\chi$$

和

$$\begin{aligned}P_\chi^2 = &\frac{1}{N}\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\chi(\rho_k)E_k\Big)\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\rho_j)E_j\Big) = \\ &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\rho_k)E_k\chi(\rho_j)E_j = \\ &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\rho_k\rho_j)E_kE_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(\rho_j)E_j = P_\chi\end{aligned}$$

因为对任何 i,j，E_i 与 E_j 交换，显然 P_χ 与 E_i 和 E_i^* 交换.

命题 6　若 χ_1 和 χ_2 是循环群$\{\rho_i\}_{i=0}^{N-1}$ 上两个不同的特征，则 P_{χ_1} 与 P_{χ_2} 正交.

证　事实上，因为对循环群上的任何特征 χ，有：

$$\chi_1(\rho_1)\chi_2^{-1}(\rho_1)\neq 1 \qquad \chi_1^N(\rho_1) = \chi_2^N(\rho_1) = 1 \qquad \chi(\rho_k) = \chi^k(\rho_1)$$

则

$$\begin{aligned}P_{\chi_1}P_{\chi_2} = &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)E_k\sum_{j=0}^{N-1}\chi_2(\rho_j)E_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)\chi_2(\rho_j)E_iE_j = \\ &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)\chi_2^{-1}(\rho_k)\chi_2(\rho_{k+j})E_{k+j} = \\ &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)\chi_2^{-1}(\rho_k)\sum_{j=0}^{N-1}\chi_2(\rho_{k+j})E_{k+j} = \\ &\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)\chi_2^{-1}(\rho_k)P_{\chi_2} = \frac{1}{N}P_{\chi_2}\sum_{k=0}^{N-1}\chi_1(\rho_k)\chi_2^{-1}(\rho_k) = \\ &\frac{1}{N}P_{\chi_2}\ \frac{1-(\chi_1(\rho_1)\chi_2^{-1}(\rho_1))^N}{1-\chi_1(\rho_1)\chi_2^{-1}(\rho_1)} = 0\end{aligned}$$

由命题 1—— 命题 6，得出本文主要结论：

定理 1　$L_a^2(\mathbb{A}_r)$ 上的 Toeplitz 算子 T_{z^N} 有且仅有 N 个极小约化子空间. 进一步地，循环群的特征与极小约化子空间一一对应.

注　定理 1 不但给出了文献[8]中结论的新证明，也是用 z^N 的局部逆的代数结构研究该 T_{z^N} 的结构的新尝试，这对研究一般情形的解析 Toeplitz 算子的结构提供了一种新的方法.

参考文献：

[1]　SUN S L, WANG Y J. The Commutants of a Class of Analytic Toeplitz Operators on Bergman Spaces [J]. Acta Sci Natur Univ Jilin, 1998(2): 4－8.

[2]　ZHU K H. Reducing Subspaces for a Class of Multiplication Operators [J]. J London Math Soc, 2000, 62(2): 553－568.

[3]　DOUGLAS R G, PUTINAR M, WANG K. Reducing Subspaces for Analytic Multipliers of the Bergman Space [J]. J

Funct Anal, 2012, 263(6): 1744－1765.

[4] DOUGLAS R G, SUN S H, ZHENG D C. Multiplication Operators on the Bergman Space Via Analytic Continuation [J]. Adv Math, 2011, 226(1): 541－583.

[5] GUO K Y, HUANG H S. On Multiplication Operators on the Bergman Space: Similarity, Unitary Equivalence and Reducing Subspaces [J]. J Operator Theory, 2011, 65(2): 355－378.

[6] GUO K Y, SUN S H, ZHENG D C, et al. Multiplication Operators on the Bergman Space Via the Hardy Space of the Bidisk [J]. J Reine Angew Math, 2009, 628: 129－168.

[7] HU J Y, SUN S H, XU X M, et al. Reducing Subspace of Analytic Toeplitz Operators on the Bergman Space [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2004, 49(3): 387－395.

[8] DOUGLAS R G, KIM Y S. Reducing Subspaces on the Annulus [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2011, 70(1): 1－15.

[9] THOMSON J E. The Commutant of a Class of Analytic Toeplitz Operators [J]. Amer J Math, 1977, 99: 522－529.

[10] CASSIER G, CHALENDAR I. The Group of the Invariants of a Finite Blaschke Product [J]. Complex Variables Theory Appl, 2000, 42(3): 193－206.

[11] KENNETH S. Analytic Functions and Hypergroups of Function Pairs [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1982, 31(6): 843－884.

Reducing Subspaces of a Class of Toeplitz Operators and Characters of the Group

XU An-jian[1], ZOU Yang[2]

1. School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;
2. Department of Mathematics and Information, Chongqing University of Education, Chongqing 400067, China

Abstract: Let $\mathbb{A}_r$ be the annuls $\{z: r<|z|<1\}$ in the complex plane, $L_a^2(\mathbb{A}_r)$ be the Bergman space on $\mathbb{A}_r$. In this article, the reducing subspaces of analytic Toeplitz operators T_{z^N} have been studied from the algebraic structure of local inverses point of view. The commutants of T_{z^N} are characterized firstly; and then it shows that the set of local inverses of z^N is the cyclic groups of order N under composition; finally it is proved that the minimal reducing subspaces and characters of the cyclic group of the local inverses of z^N are one-to-one correspondence.

Key words: annulus; Bergman spaces; reducing space; character

责任编辑 廖 坤 崔玉洁