第 43 卷　第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 8 月
Vol. 43　No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.08.026

判断空间中若干几何图形位置关系的教学设计[①]

王守中，　江　蓉

广东石油化工学院 理学院，广东 茂名 525000

摘要：线性代数有着非常广泛的应用. 判断空间中几何图形的位置关系是空间解析几何的重要内容，同时也是线性代数的一种重要应用. 这些知识点与线性代数中矩阵的秩、线性方程组等内容相互关联，形成了一个有机整体. 探讨利用线性代数的相关理论判断空间中若干几何图形位置关系的教学设计.

关　键　词：线性代数；矩阵的秩；线性方程组；空间解析几何

中图分类号：G642.41；O153　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000－5471(2018)08－0154－06

空间解析几何的一个重要的研究对象就是判断几何图形的位置关系，因此判断空间中直线与直线、平面与平面及直线与平面间的位置关系就成为了空间解析几何的重要研究内容，而判断这些几何图形的位置关系必须要借助线性代数的相关理论. 本文主要利用线性代数中有关线性方程组的相关理论以及矩阵的秩[1]这个重要概念，探讨判断空间中若干几何图形的位置关系的教学设计[2].

1　围绕教学主线合理安排教学内容的次序

平面和直线是空间解析几何中最常见的两种几何图形，其相互间的位置关系是空间解析几何的一个重要研究内容，文献[3－6]都对其进行了相关的探讨. 空间中平面方程的实质是三元线性方程. 空间中直线可看成两个(或多个)平面的交线，其方程的实质是三元线性方程组. 因此，要研究空间中平面与平面、平面与直线以及直线与直线的位置关系，就必须要研究线性方程组的解. 因为线性方程组解的情况决定了这些几何图形间的位置关系，而要探究线性方程组的解，就绕不开矩阵的秩这一重要概念. 故在线性代数的教学过程中，首先要介绍矩阵的秩，再介绍线性方程组的解，最后介绍如何借助矩阵的秩和线性方程组的知识来判断平面间、直线间、直线与平面间的位置关系. 这样才能够由浅入深地让学生真正掌握相关的教学内容.

2　做好重要概念的教学设计

2.1　深挖矩阵的秩的概念及本质

矩阵是研究线性代数中各类问题的载体，矩阵的秩在线性代数中具有重要地位，但是关于矩阵的秩的教学却存在很大的困难，主要原因是：它的相关知识在教材中较分散，这导致了学生不易掌握矩阵的秩的相关内容. 因此教师要在课堂教学中强化矩阵的秩的概念的教学，深挖此概念的本质[6].

---

①　收稿日期：2017－11－20

作者简介：王守中(1965－)，男，副教授，主要从事图论及教学法的研究.

2.2　强化矩阵的秩的计算方法的训练

由于矩阵的秩对于线性方程组的解以及空间中几何图形的位置关系的判定有重要作用，因此在课堂教学中要向学生介绍计算矩阵的秩的两种常用方法：定义法以及利用初等变换求矩阵的秩的方法，并指明它们的优缺点，引导学生熟练掌握利用矩阵的初等变换的方法来计算矩阵的秩，可为学生学习线性方程组的知识奠定坚实基础．在矩阵的秩的教学过程中，需要着重介绍分块矩阵秩的求法[7-11]．

3　多方位开展关于线性方程组的解的教学工作

3.1　帮助学生理解并熟练掌握线性方程组的多种表示方法

线性方程组的几种等价表示法如下：

(a)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

(b) 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$，则方程组(1) 记作 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$；

(c) 记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$，则线性方程组(1) 可用增广矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 或 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b})$ 表示；

(d) 若把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分成 m 块，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 可记作 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i (i = 1, 2, \cdots, m)$；

(e) 若把系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分成 n 块，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 可记作 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$.

线性方程组的第一种表示法，当 $n = 3$ 时，可以表示空间中平面($m = 1$ 时) 及直线的方程($m \geqslant 2$ 时)，在教学过程中要引导学生予以足够的重视．

3.2　帮助学生熟练掌握线性方程组的解的判断法

线性方程组的解的情况，取决于其系数矩阵的秩与增广矩阵的秩二者间的关系．文献[1]的引理 1 就是判断线性方程组的解的重要方法．只有学生掌握了线性方程组的解的判断法，才能够正确求出线性方程组的解，也才能够真正开展空间中直线以及平面位置关系的研究，因此教师在课堂教学中需花费大量的教学时间进行重点教学，讲解尽可能多的例题，使学生熟练掌握这种方法．

4　模块化、系统化地讲授空间中若干几何图形的位置关系的判断法

关于空间中的平面、直线间的位置关系的知识点在线性代数教材中非常分散，且没有形成系统化的理论，如果想获得良好的教学效果，最佳的教学方案就是进行专题介绍，一方面可以将知识模块进行有序衔接，另一方面也可以让学生对相关的判断法有整体的认识，从而能够真正掌握相关的知识．与此同时，应该在课堂教学中证明相关的结论，让学生做到不但知其然，而且知其所以然．下面介绍 3 种类型的判断法．

4.1　空间中两直线位置关系的判断法

空间中两直线的位置关系只有 4 种可能 —— 异面、重合、相交、平行(不重合)，其中两直线重合、相交、平行的情形意味着这两条直线共面．由于空间直线的方程表现形式并不唯一，因此根据直线方程的一般方程和对称式方程，可以给出两种不同的直线位置关系判定方法．

文献[3] 中的定理 1 给出了空间中两条直线的方程是一般方程时直线位置关系的判断法．但是当两条直线以对称式方程给出时，利用矩阵的秩判断两条直线的位置关系并不容易，利用空间解析几何中向量代数的知识解决更加方便．

定理 1　设空间两直线的对称式方程为：

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

记向量 $\vec{\boldsymbol{S}}_1=(m_1, n_1, p_1)$，$\vec{\boldsymbol{S}}_2=(m_2, n_2, p_2)$，$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$，则

(ⅰ) 两直线 L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow$ 3 个向量 $\vec{\boldsymbol{S}}_1, \vec{\boldsymbol{S}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$ 不共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$；

(ⅱ) 两直线 L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow$ 3 个向量 $\vec{\boldsymbol{S}}_1, \vec{\boldsymbol{S}}_2, \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}$ 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$.

证

由文献[8]的引理 2 可知，结论显然成立.

例 1 设有空间中的两条直线：

$$L_1: \frac{x-2}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{3}$$

$$L_2: \frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$$

试讨论直线 L_1 与 L_2 的位置关系.

解 由于直线的方程是对称式，故利用定理 1 判断两直线的位置关系. 由已知条件可知：

直线 L_1 的方向向量为 $\vec{\boldsymbol{S}}_1=(-1, 2, 3)$，直线 L_2 的方向向量为 $\vec{\boldsymbol{S}}_2=(2, 1, 1)$. 由于 $\vec{\boldsymbol{S}}_1$ 与 $\vec{\boldsymbol{S}}_2$ 的坐标分量不成比例，故 $\vec{\boldsymbol{S}}_1 \nparallel \vec{\boldsymbol{S}}_2$，从而 $L_1 \nparallel L_2$. 由两直线的对称式方程可知：直线 L_1 经过点 $P_1(2, -2, -1)$，直线 L_2 经过点 $P_2(5, 2, 4)$，故 $\overrightarrow{P_1P_2}=(3, 4, 5)$.

由于 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，由定理 1 知直线 L_1 与 L_2 共面. 又因为 $L_1 \nparallel L_2$，故直线 L_1 与 L_2 相交.

4.2 空间中两个平面位置关系的判断法

空间中两个平面的位置关系只有 3 种可能 —— 重合、平行(不重合)、相交. 下面利用线性方程组的理论判断空间中两个平面的位置关系.

定理 2 设空间中两平面的方程分别为：

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$，则：

(ⅰ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=1$ 时，平面 π_1 与 π_2 重合；

(ⅱ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，平面 π_1 与 π_2 平行；

(ⅲ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$ 时，平面 π_1 与 π_2 相交于一条直线.

证

将两平面的方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{1}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$，$\bar{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 分别表示此非齐次线性方程组的系数矩阵与增广矩阵．显然 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{B}})$．由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{B}})$，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$．由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant 1$．因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有 2 行，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant 2$．故 $1\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant 2$.

（ⅰ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=1$ 时，由引理 1 可知，方程组(1) 有无穷多解，意味着平面 π_1 与 π_2 相交于一条直线或重合．由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{B}})=1$，故矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的两行元素对应成比例，从而平面 π_1 与 π_2 的法向量相互平行，亦即平面 π_1 与 π_2 相互平行或重合．由于两个条件要同时满足，故平面 π_1 与 π_2 只可能重合.

（ⅱ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，由引理 1 可知，方程组(1) 无解，故平面 π_1 与 π_2 平行.

（ⅲ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$ 时，由于 $2=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$，从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$．由引理 1 可知，线性方程组(1) 有无穷多解，这意味着两个平面相交于一条直线或重合．因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，从而平面 π_1 与 π_2 的法向量不平行，故平面 π_1 与 π_2 不重合．综上所述，平面 π_1 与 π_2 必相交于一条直线.

例 2 设空间中两个平面的方程分别为：

$$\pi_1: 2x+5y-3z+4=0$$

$$\pi_2: -x-3y+z-1=0$$

判断这两个平面的位置关系.

解

记：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_2+2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，由定理 2 可知，平面 π_1 与 π_2 相交于一条直线.

4.3 空间中直线与平面间位置关系的判断法

空间中直线与平面的位置关系有：在平面上、平行、相交这 3 种情形，对应着直线方程与平面方程形成的方程组有无穷多解、无解与有唯一解的 3 种情形，因而可以利用线性方程组的理论判断它们的位置关系.

定理 3 设空间直线 L 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

平面 π 的方程为

$$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

记矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

则：

（ⅰ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，直线 L 在平面 π 上；

（ⅱ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，直线 L 与平面 π 平行；

（ⅲ）当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，直线 L 与平面 π 相交.

证

将直线与平面的方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \end{cases} \tag{2}$$

记：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad \bar{\boldsymbol{B}}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\bar{\boldsymbol{B}}$ 分别表示此非齐次线性方程组的系数矩阵与增广矩阵. 显然 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{B}})$.

由直线 L 的方程可知，形成直线 L 的两个平面的法向量(A_1,B_1,C_1)，(A_2,B_2,C_2)的分量不成比例，故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{B}})$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 只有 3 行，所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant 3$. 故 $2\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant 3$.

(ⅰ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2$ 时，由引理 1 可知：方程组(2) 有无穷多解，意味着直线 L 在平面 π 上.

(ⅱ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，由引理 1 可知：方程组(2) 无解，意味着直线 L 与平面 π 平行.

(ⅲ) 当 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$ 时，由引理 1 可知，线性方程组(2) 有唯一解，意味着直线 L 与平面 π 相交于一点. 证毕

例 3 设有直线 L：$\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 和平面 π：$4x-2y+z-2=0$，试讨论直线 L 与平面 π 的位置关系.

解

设矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -10 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 施行初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -10 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{r_2-2r_1}{\overset{r_3-2r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & -8 \end{pmatrix}$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=3$. 由定理 3 可知：直线 L 与平面 π 相交于一点.

在课堂教学的过程中，利用这些方法判断两条直线的位置关系、两个平面的位置关系以及直线与平面的位置关系是十分有效的. 但是要让学生真正掌握相关的方法，需要从课程教学的总体上进行设计，进行知识点之间恰当的衔接和过渡，这并不容易，因而值得教师对其进行深入的研究.

参考文献：

[1] 同济大学数学系. 线性代数 [M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2014：1－109.

[2] 江 蓉，周 敏. 素质教育背景下提高大学数学课堂教学质量的若干方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(4)：176－180.

[3] 安芹力. 用矩阵的秩判断两空间直线及直线与平面的位置关系 [J]. 高等数学研究，2005，8(3)：54－57.

[4] 张纪泉. 用矩阵的秩及向量间的关系判别(一)空间两直线(二)空间三平面的位置关系 [J]. 北京服装学院学报，1984(1)：86－89.

[5] 费绍金．用矩阵的秩判断空间中平面与平面、直线与直线及直线与平面间的位置关系［J］．牡丹江教育学院学报，2007(6)：139－140．
[6] 郑　惠．用直线的一般方程判断空间直线与平面以及两直线的位置关系［J］．阿坝师范学院学报，2016，33(1)：126－128．
[7] 江　蓉，王守中．矩阵的秩在线性代数中的应用及其教学方法的探讨［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2012，37(8)：175－180．
[8] 江　蓉，王守中．分块矩阵在线性代数中的应用及其教学方法探讨［J］．西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(6)：167－171．
[9] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组．高等代数［M］．2 版．北京：高等教育出版社，1988：1－202．
[10] STEVEN J L. Linear Algebra with Applications［M］．8 版．北京：机械工业出版社，2014：1－98．
[11] 魏战线，李继成．线性代数与解析几何［M］．2 版．北京：高等教育出版社，2011：80－118．

On Teaching Design of Determination of Position Relationships among Some Geometric Figures in Space

WANG Shou-zhong，　JIANG　Rong

School of Sciences，Guangdong Institute of Petrochemical Technology，Maoming Guangdong 525000，China

Abstract：Linear algebra has very wide applications in the fields of the theory and practice. It is a main part of space analytic geometry to determine the position relationships of geometric figures，and it is a kind of important application of linear algebra. These knowledge points are related to the rank of matrix and system of linear equations in linear algebra，and they form an organic whole. In this paper，We've made use of the theory of linear algebra to discuss the teaching design of determination the position relationships among some geometric figures.

Key words：linear algebra；rank of matrix；system of linear equations；space analytic geometry

责任编辑　廖　坤　崔玉洁