第 43 卷　第 9 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 9 月
Vol. 43　No. 9　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Sep.　2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.09.002

具有阶段结构的SEI传染病模型的全局分析[①]

杜燕飞，　肖　鹏，　曹　慧

陕西科技大学 数学系，西安 710021

摘要： 建立和研究了一类具有幼年和成年两个阶段结构的 SEI 传染病模型，通过分析平衡点的特征方程，讨论了平衡点的局部稳定性. 得到了基本再生数是传染病最终消除或成为地方病的阈值，当基本再生数小于 1 时，无病平衡点为全局稳定的，传染病最终消除，否则系统将一致持续生存.

关 键 词： SEI 传染病模型；阶段结构；稳定性；基本再生数

中图分类号：O175　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000 - 5471(2018)09 - 0006 - 05

近年来，通过建立传染病模型来研究传染病的传播与控制受到了广泛关注，出现了很多成果，但是大部分模型都是假定不同年龄段的个体对传染病的传染率是相同的.然而对某些传染病，实际情况并非如此，例如麻疹、水痘等多发于幼年阶段；而性病等则多在成年人之中传播. 因此考虑具有阶段结构的传染病模型更具有现实意义。目前，关于这类问题的讨论已经有了一些结论[1-7]，其中关于 SI 或者 SIR 模型的讨论居多，而考虑具有阶段结构且有潜伏期的传染病模型较少. 本文将建立一类具有阶段结构的 SEI 传染病模型，分析模型各平衡点的稳定性，研究模型的渐近性态，讨论传染病消除和一致持续的条件.

1　模型的建立

我们把总人口分为幼年和成年两个阶段，用 $x(t)$，$y(t)$ 分别表示 t 时刻幼年和成年的数量. 假设只有幼年染病，将幼年 $x(t)$ 分成 3 类：易感者 $S(t)$、潜伏者 $E(t)$ 和染病者 $I(t)$.

考虑如下具有阶段结构的 SEI 传染病模型：

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= \alpha y(t) - dS(t) - \alpha e^{-d\tau} y(t-\tau) - \mu S(t)I(t)\\ \dot{E}(t) &= \mu S(t)I(t) - dE(t) - \varepsilon E(t)\\ \dot{I}(t) &= \varepsilon E(t) - dI(t)\\ \dot{y}(t) &= \alpha e^{-d\tau} y(t-\tau) - \beta y^2(t)\end{aligned} \tag{1}$$

其中 α 表示自然出生率，d 为幼年的自然死亡率，μ 为疾病传染率，ε 为潜伏者的发病率，β 为成年的死亡率，τ 为成熟期. 初始条件为

$$\begin{aligned}&S(s) = \varphi_1(s),\ E(s) = \varphi_2(s),\ I(s) = \varphi_3(s),\ y(s) = \varphi(s),\ s \in [-\tau, 0]\\ &\varphi_i,\ \varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^4),\ \varphi_i(0) > 0,\ \varphi(0) > 0,\ i = 1,2,3\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\mathbb{R}_+^4 = \{(S, E, I, y): S \geqslant 0, E \geqslant 0, I \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. 为保证初始条件的连续性，再假设

$$\varphi_1(0) = \int_{-\tau}^{0} \alpha e^{dt} \varphi(t) \mathrm{d}t \tag{3}$$

定理 1　系统(1) 满足初始条件(2) 的解都是正的.

---

① 收稿日期：2016 - 04 - 13
基金项目：国家自然科学基金项目(11301314)；陕西省自然科学基金项目(17JK0106).
作者简介：杜燕飞(1984 -)，女，讲师，主要从事生物数学研究.

证　首先证明 $\forall t>0$，$y(t)>0$. 由初始条件的假设，$y(0)>0$，因此如果存在 t_0，使得 $y(t_0)=0$，则必有 $t_0>0$. 假设 t_0 为使得 $y(t)=0$ 满足的最小值，则 $\dot{y}(t_0)\leqslant 0$，而这与 $\dot{y}(t_0)=\alpha e^{-d\tau}y(t_0-\tau)>0$ 矛盾. 所以 $\forall t>0$，$y(t)>0$. 我们断言，对所有的 $t>0$，$E(t)>0$ 成立. 否则，存在 $t_1>0$ 使得 $E(t_1)=0$ 且 $E(t)>0$，$t\in[0,t_1)$. 则有

$$\dot{I}(t)=\varepsilon E(t)-dI(t)\geqslant -dI(t),\ t\in[0,t_1) \tag{4}$$

对(4)式两端积分得 $I(t)\geqslant I(0)e^{-dt}>0$，$t\in[0,t_1)$. 于是 $\dot{E}(t)=\mu S(t)I(t)-\varepsilon E(t)-dE(t)\geqslant -\varepsilon E(t)-dE(t)$，$t\in[0,t_1)$. $E(t_1)\geqslant E(0)e^{-(\varepsilon+d)t_1}>0$，这与假设 $E(t_1)=0$ 矛盾. 所以，$E(t)>0$ 对所有 $t>0$ 成立. 类似可证，$I(t)>0$ 对所有 $t>0$ 成立.

下面只需证明 $\forall t>0$，$S(t)>0$. 考虑辅助系统

$$\begin{aligned}&\dot{\tilde{S}}(t)=-d\tilde{S}(t)-\alpha e^{-d\tau}y(t-\tau)-\mu\tilde{S}(t)I(t)\\&\tilde{S}(0)=\varphi_1(0)\end{aligned}$$

与系统(1)比较，可得 $t\in(0,\tau]$，$S(t)>\tilde{S}(t)$，且

$$\tilde{S}(t)=e^{(-d-\mu I(t))t}\left[\tilde{S}(0)-\int_0^t\alpha e^{d(s-\tau)}y(s-\tau)ds\right]$$

则 $\tilde{S}(\tau)=e^{-(d-\mu I(\tau))\tau}\left[\int_{-\tau}^0\alpha e^{dt}\varphi(t)dt-\int_0^\tau\alpha e^{d(s-\tau)}y(s-\tau)ds\right]=0$，$S(\tau)>0$，$\dot{\tilde{S}}(\tau)<0$. 由连续性，存在 $\delta>0$，使得对所有的 $t\in(\tau-\delta,\tau+\delta)$，$\dot{\tilde{S}}(\tau)<0$ 成立，$\tilde{S}(t)$ 为严格单调减少的. 所以对于 $t\in(\tau-\delta,\tau)$，$\tilde{S}(\tau)>0$. 依次递推，当 $t\in(0,\tau)$ 时，$S(t)>\tilde{S}(t)>0$. 类似于文献[2]中定理 1 的证明方法，得 $\forall t>0$，$S(t)>0$.

定理 2　系统(1)满足初始条件(2)的解是一致有界的.

证　令 $V(t)=S(t)+E(t)+I(t)+y(t)$，则 $\dot{V}(t)=-dV(t)+(\alpha+d)y(t)-\beta y^2(t)$. 故存在正数 $L>0$ 使得 $\dot{V}(t)+dV(t)\leqslant L$，从而有 $V(t)\leqslant\dfrac{L}{d}+\left(V(0)-\dfrac{L}{d}\right)e^{-dt}<+\infty$，$t\to+\infty$.

2　平衡点的稳定性分析

显然系统存在两个边界平衡点 $E_0=(0,0,0,0)$，$E_1=(\bar{S},0,0,\bar{y})$，其中 $\bar{S}=\dfrac{\alpha^2e^{-d\tau}(1-e^{-d\tau})}{d\beta}$，$\bar{y}=\dfrac{\alpha e^{-d\tau}}{\beta}$. 当 $R_0=\dfrac{\mu\bar{S}\varepsilon}{d(d+\varepsilon)}=\dfrac{\mu\alpha^2e^{-d\tau}\varepsilon(1-e^{-d\tau})}{d^2\beta(d+\varepsilon)}>1$ 时，存在唯一的正平衡点 $E_2=(S^*,E^*,I^*,y^*)$，其中 $S^*=\dfrac{d(d+\varepsilon)}{\mu\varepsilon}$，$E^*=\dfrac{d}{\varepsilon}I^*$，$I^*=\dfrac{\mu\alpha^2e^{-d\tau}(1-e^{-d\tau})\varepsilon-d^2(d+\varepsilon)\beta}{d(d+\varepsilon)\beta\mu}$，$y^*=\dfrac{\alpha e^{-d\tau}}{\beta}$.

2.1　边界平衡点的稳定性分析

定理 3　系统(1)总有无病平衡点 E_0，E_0 不稳定. 若 $R_0<1$ 时，E_1 是局部渐近稳定的，当 $R_0>1$ 时，E_1 不稳定.

证　系统在平衡点 E_0 处的特征方程为

$$(\lambda+d)(\lambda+\varepsilon+d)(\lambda+d)(\lambda-\alpha e^{-d\tau}e^{-\lambda\tau})=0$$

显然 $\lambda_1=-d$，$\lambda_2=-(\varepsilon+d)$，$\lambda_3=-d$ 都为负根. 注意到 $y=\lambda$ 和 $y=\alpha e^{-d\tau}e^{-\lambda\tau}$ 必有一个正交点，即 $\lambda_4>0$，故 $E_0(0,0,0,0)$ 是不稳定的. 系统(1)在 E_1 处的特征方程为

$$(\lambda+d)(\lambda-\alpha e^{-(d+\lambda)\tau}+2\beta\bar{y})(\lambda^2+(2d+\varepsilon)\lambda+d(d+\varepsilon)-\mu\varepsilon\bar{S})=0$$

$\lambda_1=-d<0$；而对于超越方程

$$\lambda-\alpha e^{-(d+\lambda)\tau}+2\beta\bar{y}=0 \tag{5}$$

假设它有非负实部的根 $\lambda_2=u+iv$，代入(5)式得 $\mathrm{Re}\lambda=u=\alpha e^{-d\tau}(e^{-u\tau}\cos v\tau-2)<0$，与假设矛盾，即 λ_2 具有负实部. 下面考虑 $\lambda^2+(2d+\varepsilon)\lambda+d(d+\varepsilon)-\mu\varepsilon\bar{S}=0$. 注意到 $\lambda_3+\lambda_4<0$，当 $R_0<1$ 时，$\lambda_3\cdot\lambda_4=d(d+\varepsilon)-\mu\varepsilon\bar{S}>0$，因此 λ_3，λ_4 都为负根；当 $R_0>1$，$\lambda_3\cdot\lambda_4<0$，则特征方程有一个正根. 综上，当 $R_0<1$ 时，特征方程的所有根都具有负实部，则 E_1 是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，特征方程至少有一根具有正

实部，此时 E_1 不稳定.

2.2 疾病平衡点的稳定性分析

定理 4 若 $R_0 > 1$ 时，E_2 是局部渐近稳定的.

证 系统(1) 在 E_2 的特征方程为

$$(\alpha e^{-d\tau} e^{-\lambda\tau} - 2\beta y^* - \lambda)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$$

考虑超越方程 $\alpha e^{-d\tau} e^{-\lambda\tau} - 2\beta y^* - \lambda = 0$，用与定理 1 中类似的证明方法，可得 λ_1 有负实部. 接下来考虑 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$，其中 $a_1 = 3d + \mu I^* + \varepsilon$，$a_2 = d(d + \mu I^* + d + \varepsilon) + \mu I^*(d + \varepsilon)$，$a_3 = d\mu I^*(d + \varepsilon)$，显然 $a_1 > 0$，$a_1 a_2 - a_3 > 0$. 由 Routh-Hurwotz 准则，方程所有根都具有严格负实部. 所以，E_2 是局部渐近稳定的.

3 传染病的一致持续和消除

定理 5 $R_0 < 1$ 时，E_1 是全局渐近稳定的.

证 由定理 3，当 $R_0 = \dfrac{\mu\bar{S}\varepsilon}{d(d+\varepsilon)} < 1$ 时，E_1 是局部渐近稳定的，于是可以选取充分小的 $\delta > 0$，令 t_0 充分大，使得当 $t > t_0 - \tau$ 时，$S \leqslant \bar{S} + \delta$. 由系统(1) 的第二个和第三个方程，可得

$$\dot{E}(t) \leqslant \mu(\bar{S} + \delta)I(t) - dE(t) - \varepsilon E(t)$$

$$\bar{I}(t) = \varepsilon E(t) - dI(t)$$

现在考虑辅助系统

$$\dot{\tilde{E}}(t) = \mu(\bar{S} + \delta)\tilde{I}(t) - d\tilde{E}(t) - \varepsilon\tilde{E}(t)$$

$$\dot{\tilde{I}}(t) = \varepsilon\tilde{E}(t) - d\tilde{I}(t)$$

考察矩阵 $\begin{pmatrix} -d-\varepsilon & \mu(\bar{S}+\delta) \\ \varepsilon & -d \end{pmatrix}$，由 $R_0 < 1$ 容易计算出它的特征根都为负的，因此 $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{E}(t) = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{I}(t) = 0$. 由标准比较定理可得 $\lim\limits_{t\to\infty}E(t) = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty}I(t) = 0$. 这就意味着当基本再生数 $R_0 < 1$ 时，传染病最终消除.

下面讨论系统的一致持续，为此，我们先给出下面的预备知识. 设 X 为完备的度量空间，假设 $X_0 \subset X$，$X^0 \subset X$ 且 $X_0 \cap X^0 = \varnothing$. $T(t)$ 为 X 上的 C_0 半群，且满足

$$T(t): X_0 \to X_0,\ T(t): X^0 \to X^0 \tag{6}$$

记 $T_b = T(t)_{X_0}$，A_b 是 $T_b(t)$ 的全局吸引子.

引理 1[8] 假设 $T(t)$ 满足(6) 式，且以下条件成立：

(ⅰ) 存在 $t_0 > 0$，当 $t > t_0$ 时，$T(t)$ 是紧的.

(ⅱ) $T(t)$ 在 X 中是耗散的.

(ⅲ) $\tilde{A}_b = \bigcup\limits_{x\in A_b}\omega(x)$ 是孤立的，且有一个非循环覆盖 $\hat{M} = \{M_1, M_2, \cdots, M_n\}$.

(ⅳ) $W^s(M_i) \cap X^0 = \varnothing$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

则 X_0 一致排斥 X^0，即存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\forall x \in X^0$，有 $\liminf\limits_{t\to+\infty} d(T(t)x, X_0) \geqslant \varepsilon$.

定理 6 $R_0 > 1$ 时，系统(1) 为一致持续的.

证 令 $C_1 = \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in C([-\tau, 0], ?^4_+): \varphi_1(0) = 0, \varphi(0) = 0, \theta \in [-\tau, 0]\}$，$C_2 = \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi) \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^4_+): \varphi_2(0) = 0, \varphi_3(0) = 0, \theta \in [-\tau, 0]\}$. 若 $C_0 = C_1 \cup C_2$，$C^0 = \mathrm{int}C([-\tau, 0], \mathbb{R}^4_+)$，显然，$C_0$ 和 C^0 是正不变的.

容易验证引理 1 的条件(ⅰ) 成立，再由定理 5 知条件(ⅱ) 也成立. 现在只需证明条件(ⅲ)，(ⅳ) 成立. 在 C_0 上，系统(1) 有两个常数解 $E_0 = (0, 0, 0, 0)$，$E_1 = (\bar{S}, 0, 0, \bar{y})$. 由于 $S - y$ 平面为解平面，则从 C_2 出发的解 $(S(t), E(t), I(t), y(t)) \in C_2$，$\forall t \geqslant t_0$. $E_1 = (\bar{S}, 0, 0, \bar{y})$ 在 $S - y$ 平面为局部渐近稳定的，因此 $E_1 = (\bar{S}, 0, 0, \bar{y})$ 附近不存在极限环，则 $E_1 = (\bar{S}, 0, 0, \bar{y})$ 在该平面上为全局渐近稳定的，故 $S(t) \to \bar{S}$，$y(t) \to \bar{y}(t \to +\infty)$. 若 $(S(t), E(t), I(t), y(t))$ 为从 C_1 出发的满足 $E(0) > 0$，$I(0) > 0$ 的解，

我们知道 $E(t)\to 0$，$I(t)\to 0$，$(t\to+\infty)$. 这说明若不变集 E_0, E_1 是孤立的，则$\{E_0, E_1\}$为孤立的，且为一个非循环覆盖，显然 E_0 为孤立不变的，E_1 的孤立不变性可在下面验证条件(ⅳ)的过程中得到.

下面结合文献[9]中定理3和文献[10]中定理3.2的证明方法证明 $W^s(E_1)\cap X^0=\varnothing$. 假设 $W^s(E_1)\cap X^0\neq\varnothing$，则系统(1)存在一个正解 $(S(t), E(t), I(t), y(t))$ 使得当 $t\to+\infty$ 时，$(S(t), E(t), I(t), y(t))\to E_1(\bar{S}, 0, 0, \bar{y})$. 因为 $R_0=\dfrac{\mu\bar{S}\varepsilon}{d(d+\varepsilon)}>1$，于是可以选取充分小的 $\eta>0$，使得

$$\mu(\bar{S}-\eta)>\frac{d(d+\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{7}$$

令 t_0 充分大，使得当 $t>t_0-\tau$ 时，有 $\bar{S}-\eta<S<\bar{S}+\eta$，由系统(1)的第二个和第三个方程，可得

$$\dot{E}(t)\geqslant\mu(\bar{S}-\eta)I(t)-dE(t)-\varepsilon E(t)$$
$$\dot{I}(t)=\varepsilon E(t)-dI(t)$$

考察矩阵$\begin{pmatrix}-d-\varepsilon & \mu(\bar{S}-\eta)\\ \varepsilon & -d\end{pmatrix}$，由(7)式，我们容易计算出矩阵有特征根 $\alpha>0$. 注意到矩阵的非对角线元素都为正的，由 Perron-Frobenius 定理，对应于矩阵的最大的特征根 α 存在一个正特征向量 $\boldsymbol{v}$. 现在考虑辅助系统

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{E}}(t)&=\mu(\bar{S}-\eta)\tilde{I}(t)-d\tilde{E}(t)-\varepsilon\tilde{E}(t)\\ \dot{\tilde{I}}(t)&=\varepsilon\tilde{E}(t)-d\tilde{I}(t)\end{aligned} \tag{8}$$

令 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2)$ 且 $l>0$ 使得 $lv_1<E(t_0+\theta)$，$lv_2<I(t_0+\theta)$，$\theta\in[-\tau, 0]$. 令$(\tilde{E}(t), \tilde{I}(t))$为系统(8)满足 $\tilde{E}(t)=lv_1$，$\tilde{I}(t)=lv_2$，$t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0$，则 $\tilde{E}(t)=le^{\alpha t}v_1$，$\tilde{I}(t)=le^{\alpha t}v_2$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{E}(t)=\infty$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{I}(t)=\infty$. 由标准比较定理可得$\lim\limits_{t\to\infty}E(t)=\infty$，$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=\infty$，这与系统解的有界性矛盾. 因此 $W^s(E_1)\cap X^0=\varnothing$. 同理可得 $W^s(E_0)\cap X^0=\varnothing$. 下面与文献[10]中定理3.2的证明类似，由引理1可得 C_0 一致排斥系统(1)的正解，同时考虑到系统的解都是正的，因此存在 $\delta_i>0$，$i=1,2,3,4$，使得$\liminf\limits_{t\to\infty}S(t)\geqslant\delta_1$，$\liminf\limits_{t\to\infty}E(t)\geqslant\delta_2$，$\liminf\limits_{t\to\infty}I(t)\geqslant\delta_3$，$\liminf\limits_{t\to\infty}y(t)\geqslant\delta_4$. 定理得证.

4　数值模拟

下面利用数值模拟来验证所得的结论. 对于模型(1)，令参数 $\alpha=0.3$，$d=0.2$，$\tau=5$，$\mu=0.18$，$\varepsilon=0.5$，$\beta=0.09$，则基本再生数 $R_0=0.75<1$. 在图1中，我们模拟了系统(1)解的渐近性态，表明无病平衡点是全局渐近稳定的，传染病将最终消除. 下面我们取 $\mu=0.4$，其它参数同图1，则 $R_0=1.66>1$，图2的模拟结果说明了系统的一致持续生存.

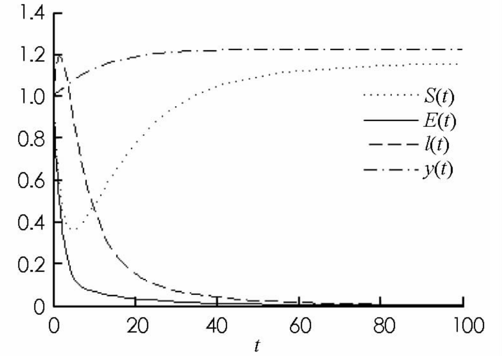

图1　模型(1)无病平衡点的全局稳定性

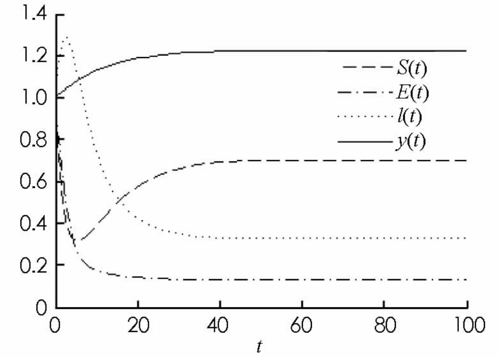

图2　模型(1)的一致持续生存

5　结　　论

本文建立了一类具有阶段结构的SEI传染病模型，计算了基本再生数和平衡点. 证明了当 $R_0<1$ 时，

系统有两个边界平衡点，其中 E_0 不稳定，E_1 是全局渐近稳定的，疾病最终消除；当$R_0>1$时，E_1 不稳定，系统存在唯一的正平衡点 E_2，E_2 为局部渐近稳定的，此时，系统一致持续.

参考文献：

[1] WANG W D，ZHAO X Q. An Age-Structured Epidemic Model in a Patchy Environment [J]. SIAMJ Appl Math，2005，65(5)：1597－1614.

[2] AIELLO W G，FREEDMAN H I. A Time-Delay Model of Single-Species Growth with Stage Structure [J]. Mathematical Biosciences，1990，101(2)：139－153.

[3] ALELLO W G，FREEDMAN H I，WU J. Analysis of a Model Representing Stage-Structured Populations Growth with Stage-Dependent Time Delay [J]. Siam Journal on Applied Mathematics，1992，52(3)：855－869.

[4] LIU X，ZHAO X Q. A Periodic Epidemic Model with Age Structure in a Patchy Environment [J]. SIAM J Appl Math，2011，71(6)：1896－1917.

[5] XIAO Y N，CHEN L S. An SIS Epidemic Model with Stage Structure and a Delay [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2002，18(4)：607－618.

[6] ZHANG T L，LIU J L，TENG Z D. Stability of Hopf Bifurcation of a Delayed SIRS Epidemic Model with Stage Structure [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2010，11(1)：293－306.

[7] 金 瑜，张 勇，王稳地. 一类具有阶段结构的传染病模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2003，28(6)：863－868.

[8] WANG W D，CHEN L S. A Predator-Prey Systern with Stage-Structure for Predator [J]. Computers Math Applic，1997，33(8)：83－91.

[9] WANG L，XU R，TIAN X H. Global Stability of a Predator-Prey Model with Stage Structure for the Predator [J]. World Journal of Modelling & Simulation，2009，5(3)：63－70.

[10] LU Z H，GAO S J，CHEN L S. Analysis of an SI Epidemic Model with Nonlinear Transmission and Stage Structure [J]. Acta Mathematica Scientia，2003，23(4)：440－446.

On Dynamic Behavior of an SEI Epidemic Model with Stage-Structure

DU Yan-fei， XIAO Peng， CAO Hui

Department of Mathematics，Shaanxi University of Science and Technology，Xi′an 710021，China

Abstract：In this paper，an SEI Epidemic Model with Stage-structure is established and studied，in which the population is divided into two stages：immature stage and mature stage. By discussing the eigenvalue equation of the equilibriums，locally asymptotic stability of the equilibriums are obtained. It is shown that the global dynamics is determined by the basic reproduction number，when the basic reproduction number is less than 1，the disease free equilibrium is globally asymptotically stable；otherwise the disease persists.

Key words：SEI epidemic model；stage-structured；stability；the basic reproduction number

责任编辑 张 枸