

随机 Sprott-F 混沌系统的有限时间同步^①

闫丽宏

咸阳师范学院 数学与信息科学学院, 陕西 咸阳 712000

摘要: 讨论了随机受扰的 Sprott-F 混沌系统的有限时间稳定性问题. 首先构造了随机受扰的混沌 Sprott-F 驱动—响应系统模型, 接着基于有限时间 Lyapunov 稳定性定理、Itô 公式和相关假设条件, 设计了合适的非线性反馈控制器, 通过理论证明了受扰的 Sprott-F 驱动—响应系统的有限时间稳定性结论. 最后利用数值模拟验证了本文所给结论的正确性和所设计的非线性反馈控制器的有效性.

关键词: 混沌; 随机扰动; 有限时间同步

中图分类号: O231.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)09-0017-05

在工程应用和科技研究中, 广泛存在的混沌现象一直是人们研究的热点问题^[1-2]. 由于其具有内在随机性和对初值的敏感依赖性, 使得人们期望可以“抑制”混沌, 这就是狭义的混沌控制问题. 但继 Pecora 和 Carroll 提出驱动响应同步方法之后, 人们通过研究发现, 以混沌同步技术(混沌遮掩、调制和开关技术)为核心的混沌保密通信系统^[3-6]在数字通信领域有着十分重要的应用. 目前提出的同步控制方法^[7-12]有驱动—响应同步法、自适应同步法、反馈同步法、观测器同步法、主动—被动同步法等.

然而在现实世界中, 不确定性是客观存在的. 例如由环境不确定性产生的噪声影响和物理系统的随机受迫现象. 而在保密通信中, 如果混沌振子在有限时间里不能达到同步, 加密信息将不能在有限时间里被成功恢复或发送, 这都将造成无法挽回的损失^[13]. 此类的问题要求人们寻找合适的控制方法, 在有限时间内实现系统的同步^[14-15]. 所以讨论含有随机扰动的混沌系统的有限时间同步问题具有重要的理论意义和实际价值.

文献[16]利用主动控制法实现了 Lorenz, Chen 和 Lü 异结构系统之间的两两有限时间同步. 文献[17]考虑了 Lurie 系统及其相关系统的有限时间同步. 但这些文献的研究中尚未考虑随机干扰因素, 而且目前关于混沌系统有限时间同步的问题中, 通常采用含有符号函数 $\text{sign}(\cdot)$ 的控制器, 这可能导致“振荡现象”. 基于此, 本文讨论改进 Sprott-F 系统^[18]在随机受扰下的有限时间同步问题.

对于改进的 Sprott-F 混沌系统, 笔者已对该系统的基本属性, 如平衡点、稳定性、由倍周期分岔通向混沌的过程都进行了深入分析^[18], 并利用时滞反馈、比例微分等方法实现了混沌控制. 本文将以该系统作为研究对象, 利用系统的误差信息构造合适的控制器, 实现该系统在随机受扰下的有限时间同步.

1 问题陈述和知识预备

首先给出随机受扰 Sprott-F 混沌系统, 其方程是:

① 收稿日期: 2016-12-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(61401383); 陕西省自然科学基金计划项目(2014JM2-1002); 咸阳师范学院自然科学项目(14XSYK004).

作者简介: 闫丽宏(1981-), 女, 讲师, 博士研究生, 主要从事非线性系统控制与同步的研究.

$$\begin{cases} dx_1 = (x_2 + x_3)dt + g_1(t, x_1)d\omega(t) \\ dx_2 = (-x_1 + bx_2)dt + g_2(t, x_2)d\omega(t) \\ dx_3 = (x_1^2 - x_3)dt + g_3(t, x_3)d\omega(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 表示系统状态变量; $g_i(t, x_i(t)) = 0, i = 1, 2, 3$ 表示网络外部噪声连续非线性函数, 并满足假设 1. $\omega(t)$ 是标准的一维维纳随机过程, 代表随机扰动, 且满足 $E(d\omega(t)) = 0, E(d^2\omega(t)) = dt$. 当 $g_i(t, x_i(t)) = 0, i = 1, 2, 3, b = 0.5$ 时, 系统处于混沌状态. 受控响应系统方程如下:

$$\begin{cases} dy_1 = (y_2 + y_3 + u_1)dt + g_1(t, y_1)d\omega(t) \\ dy_2 = (-y_1 + by_2 + u_2)dt + g_2(t, y_2)d\omega(t) \\ dy_3 = (y_1^2 - y_3 + u_3)dt + g_3(t, y_3)d\omega(t) \end{cases} \quad (2)$$

定义驱动系统(1)和响应系统(2)的误差为:

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

本文的研究目标是通过设置合适的控制器 $u_i (i = 1, 2, 3)$, 使得系统(1)和(2)达到有限时间同步, 即如果存在正数 $\bar{t} > 0$, 使得状态误差 $e_i(t), i = 1, 2, 3$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \|e_i(t)\| = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

且当 $t > \bar{t}$ 时, 有 $\|e_i(t)\| = 0 (i = 1, 2, 3)$, 则称系统在 $\bar{t}$ 时刻内达到有限时间同步.

为了达到有限时间同步, 需要以下相关假设和结论.

假设 1 对于混沌系统(1)和(2), 存在非负常数 $\rho_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$\frac{1}{2} \text{tr}\{[g_i(t, x) - g_i(t, y)]^T [g_i(t, x) - g_i(t, y)]\} \leq \sum_{j=1}^N \rho_{ij} \|x_j(t) - y_j(t)\|^2 \quad (5)$$

引理 1(有限时间稳定性定理^[2]) 假设存在连续的、正定的函数 $V(t)$ 满足下面的微分不等式

$$\dot{V}(t) \leq -\epsilon V^\alpha(t) \quad \forall t \geq t_0 \quad V(t_0) \geq 0$$

其中 $\epsilon > 0, 0 < \alpha < 1$, 那么对于任意给定的 $t_0, V(t)$ 满足下面的微分不等式

$$V^{1-\alpha}(t) \leq V^{1-\alpha}(t_0) - \epsilon(1-\alpha)(t-t_0), t_0 \leq t \leq \bar{t}$$

且当 $\forall t \geq \bar{t}$ 时 $V(t) \equiv 0, \bar{t} = t_0 + \frac{V^{1-\alpha}(t_0)}{\epsilon(1-\alpha)}$.

引理 2(Itô 公式) 对于 n 维随机微分系统 $dx(t) = f(x)dt + g(x)d\omega$, 令 $V(\mathbf{x}(t), t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, 其中 $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ 表示关于 x 二阶连续可微且关于 t 一阶可微的全体函数集合. 则算子 $LV(\mathbf{x}(t), t)$ 可定义为:

$$LV(\mathbf{x}(t), t) = V_t(\mathbf{x}(t), t) + V_x(\mathbf{x}(t), t)f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{tr}[g^T(\mathbf{x})V_{xx}(\mathbf{x}(t), t)g(\mathbf{x})]$$

其中 $V_t(\mathbf{x}(t), t), V_x(\mathbf{x}(t), t), V_{xx}(\mathbf{x}(t), t)$ 分别表示关于变量的偏导数.

2 主要结果

通过计算得到驱动与响应混沌系统的误差状态方程:

$$\begin{cases} de_1 = (e_2 + e_3 + u_1)dt + g_1(t, e_1)d\omega(t) \\ de_2 = (-e_1 + be_2 + u_2)dt + g_2(t, e_2)d\omega(t) \\ de_3 = (e_1^2 + 2e_1y_1 - e_3 + u_3)dt + g_3(t, e_3)d\omega(t) \end{cases} \quad (6)$$

其中 $g_i(t, e_i) \triangleq g_i(t, y_i) - g_i(t, x_i), i = 1, 2, 3$.

可知, 混沌系统(1)和(2)的有限时间同步等价于系统(4)在原点的有限时间稳定性.

不妨取控制器 $\mathbf{U}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ 为:

$$\begin{cases} u_1(t) = -e_1e_3 - \eta_1e_1^2 - \rho_{11}e_1 \\ u_2(t) = -be_2 - \eta_2e_2^2 - \rho_{21}e_2 \\ u_3(t) = -e_1 - 2e_1y_1 - \eta_3e_3^2 - \rho_{31}e_3 \end{cases} \quad (7)$$

其中: 参数 σ 满足 $-1 < \sigma < 3$; 反馈控制参数 $\eta = \max\{\eta_i\}$, $i = 1, 2, 3$ 是任意正数; ρ_{i1} , $i = 1, 2, 3$ 是满足假设 1 的正参数.

定理 1 在控制器(7)作用下, 随机驱动响应系统(1)和(2)可在有限时间 $\bar{t} = t_0 + \frac{V^{1-\alpha}(t_0)}{\epsilon(1-\alpha)}$ 内实现同步.

证 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_i^2$, 利用 Itô 公式, 有

$$\begin{aligned} LV(e(t), t) = & e_1(e_2 + e_3 + u_1) + e_2(-e_1 + be_2 + u_2) + e_3(e_1^2 + 2e_1y_1 - e_3 + u_3) + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{[g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]^T [g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]\} = \\ & e_1(e_2 + e_3 - e_1e_3 - \eta_1 e_1^\sigma - \rho_{11}e_1) + e_3(e_1^2 + 2e_1y_1 - e_3 - e_1 - 2e_1y_1 - \eta_3 e_3^\sigma - \rho_{31}e_3) + \\ & e_2(-e_1 + be_2 - be_2 - \eta_2 e_2^\sigma - \rho_{21}e_2) + \frac{1}{2} \text{tr}\{[g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]^T [g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]\} \leqslant \\ & -\eta_1 e_1^{\sigma+1} - \rho_{11}e_1^2 - \eta_2 e_2^{\sigma+1} - \eta_3 e_3^{\sigma+1} - \rho_{31}e_3^2 + \\ & \frac{1}{2} \text{tr}\{[g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]^T [g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]\} \end{aligned}$$

结合假设 1, 有

$$\frac{1}{2} \text{tr}\{[g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]^T [g_i(\mathbf{x}) - g_i(\mathbf{y})]\} \leqslant \rho_{11}e_1^2 + \rho_{21}e_2^2 + \rho_{31}e_3^2 \quad (8)$$

令 $\rho = \max_{1 \leqslant i \leqslant 3} \{\rho_{i1}\}$, 根据引理 2, 可知, $LV(t) \leqslant -\eta_1 e_1^{\sigma+1} - \eta_2 e_2^{\sigma+1} - \eta_3 e_3^{\sigma+1}$.

不妨取 $\eta = \min_{1 \leqslant i \leqslant 3} \{\eta_i\}$, 则有

$$LV(t) \leqslant -\eta(e_1^{\sigma+1} + e_2^{\sigma+1} + e_3^{\sigma+1}) = -2^{\frac{1+\sigma}{2}} \eta(e_1^{\frac{\sigma+1}{2}} + e_2^{\frac{\sigma+1}{2}} + e_3^{\frac{\sigma+1}{2}}) \quad (9)$$

利用不等关系 $\|x_1\|^q + \|x_2\|^q + \dots + \|x_n\|^q \geqslant (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{\frac{q}{2}}$, $0 < q < 2$, 我们可以得到,

$$LV(t) \leqslant -2^{\frac{1+\sigma}{2}} \eta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)^{\frac{1+\sigma}{4}} = -2^{\frac{1+\sigma}{2}} \eta V^{\frac{1+\sigma}{4}}(t), \quad -1 < \sigma < 3 \quad (10)$$

做变量替换, 令 $\epsilon = 2^{\frac{1+\sigma}{2}} \eta$, $\alpha = \frac{1+\sigma}{4}$, 则有

$$LV(t) \leqslant -\epsilon V^\alpha(t) \quad (11)$$

根据有限时间稳定性定理, 可知在控制器(7)的作用下, 对于任意给定的初始时刻 t_0 , 在某个时刻 $\bar{t} = t_0 + \frac{V^{1-\alpha}(t_0)}{\epsilon(1-\alpha)}$ 内, 误差微分系统(6)是有限时间稳定的. 当 $\forall t \geqslant \bar{t}$, $V(t) \equiv 0$, 而 $V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_i^2$, 意味着

误差 $e_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$. 由此得到驱动响应系统(1)和(2)在 $\bar{t} = t_0 + \frac{V^{1-\alpha}(t_0)}{\epsilon(1-\alpha)}$ 可达到有限时间同步.

3 数值模拟

利用 Matlab 软件, 对随机 Sprott-F 混沌系统(1)和(2)的有限时间同步结论进行验证. 选取系统参数 $b = 0.5$, 驱动响应系统的初始值分别为: $(x_0, x_1, x_2) = (0.8, 1, 0.2)$, $(y_0, y_1, y_2) = (2, -0.1, 0.9)$.

对于网络外部噪声函数, 不妨假设为:

$$\begin{cases} g_i(t, x_i(t)) = 3x_i(t) \\ g_i(t, y_i(t)) = 3y_i(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

通过计算, 可取假设 1 中参数 $\rho = 10$. 控制器中的相关参数取值为: $\sigma = 0.1$, $\eta_1 = 0.3$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.2$, 则可知 $\eta = 0.5$. 仿真结果如下图 1 所示, 系统误差在 0.54 秒时达到 0, 这表明 Sprott-F 驱动-响应系统在 $\bar{t} = 0.54$ 秒内实现同步. 固定初始值, 参数 $\sigma = 0.1$, 重新选取参数 $\eta_1 = 1.7$, $\eta_2 = 2.5$, $\eta_3 = 2.7$.

通过仿真,可知系统在 $\bar{t} = 0.435\text{ s}$ 内实现同步. 仿真结果如图 1(b) 所示,该图表示在此组参数下系统的误差轨迹.

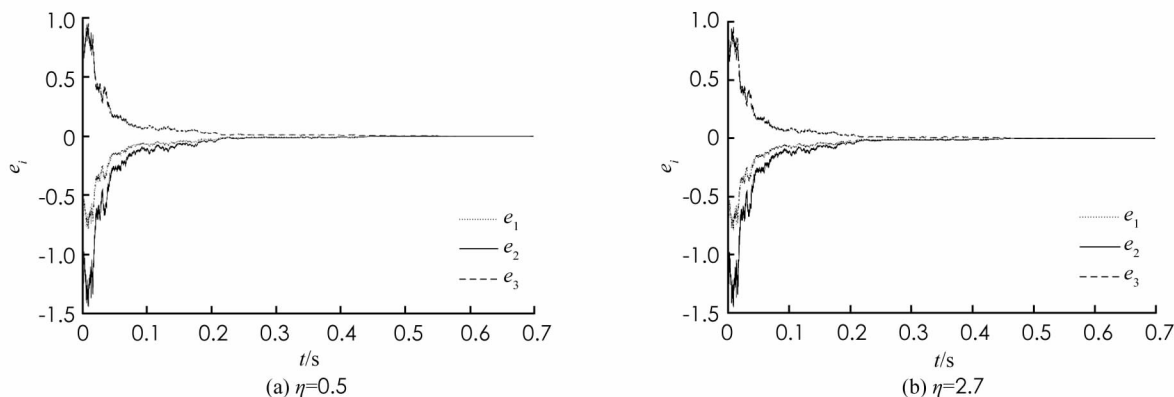


图 1 驱动响应系统误差轨迹图

通过仿真可以看到,驱动响应系统(1)和(2)实现同步的时间与 η_i , $i = 1, 2, 3$ 的选取有关, η 越大,则系统同步所需时间越小,这也与理论分析相吻合. 事实上,根据定理,关系式 $\epsilon = 2^{\frac{1+\eta}{2}} \eta$ 充分说明驱动响应系统(1)和(2)实现有限时间同步的时间 $\bar{t}$ 与参数 η 的取值成反比关系.

4 结束语

对含有随机扰动的混沌系统的有限时间同步问题的讨论具有重要的实际意义. 以随机受扰 Sprott-F 系统为例,在外部控制器作用下,证明了系统实现有限时间同步的结果. 同时利用数值仿真,进行了相关分析,说明了控制方法的可行性和有效性. 本文的结果可推广应用到一般随机受扰混沌系统的同步问题中.

参考文献:

- [1] WANG Chao, GE Sheng-sheng. Adaptive Synchronization of Uncertain Chaotic Systems via Backstepping Design [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(7): 1199—1206.
- [2] CHEN Wei-sheng, JIAO Li-cheng. Finite-time Stability Theorem of Stochastic Nonlinear Systems [J]. Automatica, 2010, 46(12): 2105—2108.
- [3] 申 敏, 刘 娟. Rössler 超混沌系统的同步及其在保密通信中的应用 [J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2009, 21(3): 372—375.
- [4] 罗小华, 薛 飞, 何 伦. 非自治异结构混沌系统同步及其在保密通信中的应用 [J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2011, 23(3): 323—327.
- [5] OPPENHEIM A V, WORNELL G W, ISABELLE S H, et al. Signal Processing in the Context of Chaotic Signals [C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. New York: IEEE Press, 1992: 117—120.
- [6] KOCAREV L, HALLE K S, ECKERT K, et al. Experimental Demonstration of Secure Communication via Chaotic Synchronization [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1992, 2(3): 709—713.
- [7] JIANG G P, TANG W K, CHEN G R. A Simple Global Synchronization Criterion for Coupled Chaotic Systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 15(5): 925—935.
- [8] WANG Yan-wu, GUAN Zhi-hong, WEN Xiao-jiang. Adaptive Synchronization for Chen Chaotic System with Fully Unknown Parameters [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(4): 899—903.
- [9] WANG Hua, HAN Zheng-zhi, XIE Qi-yue, et al. Finite-time Chaos Synchronization of Unified Chaotic System with Uncertain Parameters [J]. Commun in Nonli Sci and Numer Simul, 2009, 14(5): 2239—2247.
- [10] WEI Zhou-chao. Synchronization of Coupled Nonidentical Fractional Order Hyperchaotic Systems [J]. Discret Dyn Nat Soc, 2011(9): 53—63.
- [11] 闵富红, 王执铨. 复杂 Dynamos 混沌系统的追踪控制与同步 [J]. 物理学报, 2008, 57(1): 31—36.

- [12] 罗小华, 李华青, 吴 昊, 等. 异结构混沌系统的自适应同步控制 [J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2009, 21(3): 376—378.
- [13] BOWONG S, KAKEMENI M, KOINA R. Chaos Synchronization and Duration Time of a Class of Uncertain Chaotic Systems [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2006, 71(3): 212—228.
- [14] WANG Xing-yuan, NIAN Fu-zhong, GUO Ge. High Precision Fast Projective Synchronization in Chaotic (Hyperchaotic) Systems [J]. Physics Letters A, 2009, 373(20): 1754—1761.
- [15] WANG Hua, HAN Zheng-zhi, XIE Qi-yue. Finite-Time Chaos Synchronization of Unified Chaotic System with Uncertain Parameters [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14(5): 2239—2247.
- [16] 董玉才, 杨万利, 夏晓东. 基于主动控制的异结构系统的有限时间同步 [J]. 武汉理工大学学报, 2010, 32(11): 94—99.
- [17] 毛北行, 李巧利. Lurie 混沌系统的有限时间同步问题 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(4): 497—500.
- [18] 陈俊峰, 闫丽宏. Sprott-F 系统的混沌控制研究 [J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2009, 27(1): 29—33.

Finite-Time Synchronization of Sprott-F Chaotic System with Stochastic Perturbation

YAN Li-hong

School of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang Shaanxi 712000, China

Abstract: Finite-time synchronization of Sprott-F chaotic system with stochastic perturbation is investigated in the paper. Firstly, the drive-response chaotic Sprott-F system is constructed, then an effective controller is designed to guarantee the finite-time synchronization of the drive-response systems based on finite-time stochastic Lyapunov stability theory, *Itô* formula and relative assumptions. And finally, numerical simulations are provided to illustrate the correctness and activeness of the theoretical results.

Key words: chaos; stochastic perturbation; finite-time synchronization

责任编辑 张 杓