DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.09.005

一类空间非因果关系反应扩散方程的边界控制①

郭春丽

四川文理学院 数学学院,四川 达州 635000

摘要: 运用 Backstepping 方法研究了一类空间非因果关系的反应扩散方程的稳定性问题,该系统的温度与整个空间有关系,而不是仅仅与空间中的某一点有关,因此,给控制器的设计带来了难度. 为设计反馈控制器,首先,选用边界反馈控制的 Backstepping 方法进行设计;其次,在设计过程中增加核函数个数,引入改进后的 Volterra 型积分变换,再采用求解偏微分方程的变量分离法求解出核函数;最后,找到 Volterra 变换的逆变换,利用 Volterra 变换及其逆变换的有界性,可证明控制器的有效性.

关 键 词: 反应扩散方程;Volterra 变换;稳定性;边界控制

中图分类号:O213.4　　**文献标志码:A**　　**文章编号:** 1000-5471(2018)09-0022-08

研究分布参数系统的控制问题具有很大的实际意义,分布参数系统的控制方法较多,其中边界反馈控制法由于容易实现而发展最快. Backstepping 方法被广泛地运用于偏微分方程的控制问题中[1-14]. 本文运用 Backstepping 方法讨论了一类由反应扩散方程描述的特殊热传导问题,该热方程反映的是吸热化学反应器的热传导问题,利用该方法考虑了这类反应扩散方程的稳定性问题,由于此反应扩散系统是对文献[6]控制系统的完善,因此采用类似的方法进行研究.

考虑如下的反应扩散系统

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \int_0^1 \lambda(y) u(y,t) \mathrm{d}y, \ x \in (0,1), \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \ t > 0 \\ u(1,t) = U(t), \ t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中:$u(x,t)$ 表示温度,控制的输入 $U(t)$ 在方程的右端点 $x=1$ 处,扩散项中的函数 $\lambda(y) < 0$. 当 $|\lambda(y)|$ 足够大且在 $U(t)=0$ 时控制系统(1) 是不稳定的,即不加控制的开环系统是不稳定的. 控制系统(1) 描述的是吸热化学反应器的热传导问题,当 $|\lambda(y)|$ 大到一定程度时,化学反应器的温度会下降很快,从而使得反应器的温度不稳定,因此控制设计的目的就是设计反馈控制器使不稳定系统在给定范数意义下实现指数稳定.

1 状态反馈

控制系统(1) 是文献[6] 中控制系统的完善,为设计系统(1) 的控制器 $U(t)$,采用类似的偏微分方程边界控制的 Backstepping 方法. 首先,引入指数稳定的目标系统

$$\begin{cases} w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) + \alpha w(x,t), \ x \in (0,1), \ t > 0 \\ w_x(0,t) = 0, \ t > 0 \\ w(1,t) = 0, \ t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

① 收稿日期:2016-11-30
基金项目:四川省教育厅一般项目(15ZB0325).
作者简介:郭春丽(1987-),女,讲师,主要从事分布参数控制系统研究.

其中 α 和 β 是常数，用于控制稳定速度，且 $\alpha=-\beta^2$. 同时引入可逆变换

$$w(x,t)=u(x,t)-\int_0^x k(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 h(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{3}$$

其中 $k(x,y)$,$h(x,y)$ 是待定的核函数. 变换(3) 将控制系统(1) 转化为目标系统(2).

其次，在变换(3) 中令 $x=1$，再由目标系统(2) 中的边界条件 $w(1,t)=0$，可得控制输入

$$U(t)=u(1,t)=\int_0^1 k(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 h(1,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{4}$$

最后，为证明控制器的有效性，需得到变换(3) 的逆变换

$$u(x,t)=w(x,t)+\int_0^x l(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y+\int_0^1 r(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y \tag{5}$$

逆变换(5) 将目标系统(2) 转化为控制系统(1). 运用目标系统的稳定性及变换(3) 和(4) 的有界性可证明闭环系统的稳定性.

2　核函数的求解

为得到控制输入(4)，需要求解核函数 $k(x,y)$,$h(x,y)$. 首先，在变换(3) 的两边同时关于变量 x 求一、二阶偏导数，有

$$w_x(x,t)=u_x(x,t)-k(x,x)u(x,t)-\int_0^x k_x(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 h_x(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y \tag{6}$$

$$\begin{aligned}w_{xx}(x,t)=&u_{xx}(x,t)-k'(x,x)u(x,t)-k(x,x)u_x(x,t)-k_x(x,x)u(x,t)-\\&\int_0^x k_{xx}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 h_{xx}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{7}$$

其中：$k'(x,x)=k_x(x,x)+k_y(x,x)$；$k_x(x,x)=\dfrac{\partial k(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=x}$；$k_y(x,x)=\dfrac{\partial k(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=x}$.

同样地，在变换(3) 的两边关于变量 t 求偏导，得

$$w_t(x,t)=u_t(x,t)-\int_0^x k(x,y)u_t(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 h(x,y)u_t(y,t)\mathrm{d}y \tag{8}$$

又由 $u(x,t)$ 满足系统(1) 式中的方程及边界条件，将 $u_t(x,t)$ 代入(8) 式中，有

$$\begin{aligned}w_t(x,t)=&u_{xx}(x,t)+\int_0^1\lambda(y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^x k(x,y)\Big[u_{yy}(y,t)+\int_0^1\lambda(s)u(s,t)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}y-\\&\int_0^1 h(x,y)\Big[u_{yy}(y,t)+\int_0^1\lambda(s)u(s,t)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}y=\\&u_{xx}(x,t)-k(x,x)u_x(x,t)+k_y(x,x)u(x,t)-h(x,1)u_x(1,t)+h_y(x,1)u(1,t)-\\&(k_y(x,0)+h_y(x,0))u(0,t)-\int_0^x k_{yy}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y-\int_0^1 h_{yy}(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y+\\&\int_0^1\lambda(y)\Big(1-\int_0^x k(x,s)\mathrm{d}s-\int_0^1 h(x,s)\mathrm{d}s\Big)u(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{9}$$

再由(7) 式和(9) 式可得

$$\begin{aligned}&w_t(x,t)-w_{xx}(x,t)-\alpha w(x,t)=\\&(2k'(x,x)-\alpha)u(x,t)-(k_y(x,0)+h_y(x,0))u(0,t)-h(x,1)u_x(1,t)+\\&h_y(x,1)u(1,t)+\int_0^x(k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)+\alpha k(x,y))u(y,t)\mathrm{d}y+\\&\int_0^1(h_{xx}(x,y)-h_{yy}(x,y)+\alpha h(x,y)+\lambda(y)f_{k,h}(x))u(y,t)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中

$$f_{k,h}(x)=1-\int_0^x k(x,s)\mathrm{d}s-\int_0^1 h(x,s)\mathrm{d}s \tag{10}$$

为满足目标系统(2) 中的方程，则核函数 $k(x,y)$,$h(x,y)$ 需满足如下方程组

$$\begin{cases} k'(x,x)=\dfrac{\alpha}{2},\ h(x,1)=0,\ h_y(x,1)=0 \\ k_y(x,0)+h_y(x,0)=0 \\ k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)+\alpha k(x,y)=0 \\ h_{xx}(x,y)-h_{yy}(x,y)+\alpha h(x,y)+\lambda(y)f_{k,h}(x)=0 \end{cases} \tag{11}$$

同时为满足目标系统(2)中的边界条件 $w_x(x,t)=0$，在式(6)中取 $x=0$，再由系统(1)中的边界条件 $u_x(x,t)=0$ 有

$$w_x(0,t)=-k(0,0)u(0,t)-\int_0^1 h_x(0,y)u(y,t)\mathrm{d}y=0 \tag{12}$$

从而有

$$k(0,0)=0,\ h_x(0,y)=0 \tag{13}$$

下面求解核函数 $k(x,y)$,$h(x,y)$，先由方程组(11)中的 $k'(x,x)=-\dfrac{\alpha}{2}$ 及 $k(0,0)=0$ 有 $k(x,x)=-\dfrac{\alpha}{2}x$，则核函数 $k(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} k_{xx}(x,y)-k_{yy}(x,y)+\alpha k(x,y)=0 \\ k(x,x)=\dfrac{\alpha}{2}x \\ k_y(x,0)=-h_y(x,0) \end{cases} \tag{14}$$

核函数 $h(x,y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} h_{xx}(x,y)-h_{yy}(x,y)+\alpha h(x,y)+\lambda(y)f_{k,h}(x)=0 \\ h_y(x,1)=0,\ h(x,1)=0,\ h_x(0,y)=0 \end{cases} \tag{15}$$

其中 $f_{k,h}(x)$ 由(10)式给出.

其次，采用求解偏微分方程的变量分离方法，求解出核函数 $h(x,y)$. 令

$$h(x,y)=p(x)q(y) \tag{16}$$

那么方程组(15)转化为

$$\begin{cases} p''(x)q(y)-p(x)q''(y)+\alpha p(x)q(y)+\lambda(y)f_{k,h}(x)=0 \\ q'(1)=0,\ q(1)=0,\ p'(0)=0 \end{cases} \tag{17}$$

这里不妨设 $p(x)\neq 0$，又 $\alpha=-\beta^2$，则式(17)转化为

$$\begin{cases} q''(y)+\left(\beta^2-\dfrac{p''(x)}{p(x)}\right)q(y)-\lambda(y)\dfrac{f_{k,h}(x)}{p(x)}=0 \\ q'(1)=0,\ q(1)=0,\ p'(0)=0 \end{cases} \tag{18}$$

下面求使得 $\dfrac{p''(x)}{p(x)}$，$\dfrac{f_{p,q}(x)}{p(x)}$ 为常数的方程组(18)的解，即

$$\frac{p''(x)}{p(x)}=-a^2,\ \frac{f_{k,h}(x)}{p(x)}=b$$

其中 a,b 是待定的非零常数.

从而，$p(x)$ 满足方程组

$$\begin{cases} p''(x)+a^2p(x)=0 \\ p'(0)=0 \end{cases} \tag{19}$$

由于方程组(19)为二阶偏微分方程，但边界条件只有一个，故解不唯一. 为简化运算，不妨取 $p(0)=1$，解得

$$p(x)=\cos(ax) \tag{20}$$

则 $q(y)$ 满足方程组

$$\begin{cases} q''(y)+(a^2+\beta^2)q(y)-b\lambda(y)=0 \\ q'(1)=0,\ q(1)=0 \end{cases} \tag{21}$$

解方程(21)，可得

$$q(y)=\frac{b}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\int_y^1 \sin(\sqrt{a^2+\beta^2}(z-y))\lambda(z)\mathrm{d}z \tag{22}$$

最后，将 $p(x)$,$q(y)$ 代入 $f_{k,h}(x)$，使得$\frac{f_{k,h}(x)}{p(x)}=b$，从而确定出待定常数 a,b 的值．由(22)式可得

$$q'(0)=-\int_0^1 b\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z \tag{23}$$

及

$$\begin{aligned}\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s=&\frac{b}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\int_0^1\int_s^1 \sin(\sqrt{a^2+\beta^2}(z-s))\lambda(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s=\\ &\frac{b}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\int_0^1\lambda(z)\int_0^z \sin(\sqrt{a^2+\beta^2}(z-s))\mathrm{d}s\mathrm{d}z=\\ &\frac{b}{a^2+\beta^2}\int_0^1[1-\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)]\lambda(z)\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{24}$$

对方程(14)的两边在区间$(0,x)$上关于 y 积分，再由 $k_y(x,0)=-h_y(x,0)=-p(x)q'(0)$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\int_0^x k(x,y)\mathrm{d}y\right)+\alpha\int_0^x k(x,y)\mathrm{d}y-\alpha-p(x)q'(0)=0$$

从而，由式(19)及 $\alpha=-\beta^2$ 可得

$$\int_0^x k(x,y)\mathrm{d}y-1=\frac{q'(0)}{\alpha-a^2}p(x)=-\frac{q'(0)}{a^2+\beta^2}p(x) \tag{25}$$

由式(23)－(25)及 $h(x,y)=p(x)q(y)$ 可得

$$\begin{aligned}&f_{k,h}(x)=\\ &1-\int_0^x k(x,s)\mathrm{d}s-p(x)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s=\\ &\frac{q'(0)}{a^2+\beta^2}p(x)-p(x)\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s=\\ &p(x)\cdot\frac{b}{a^2+\beta^2}\left[-\int_0^1\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z-\int_0^1(1-\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z))\lambda(z)\mathrm{d}z\right]=\\ &-\frac{b}{a^2+\beta^2}\cdot\int_0^1\lambda(z)\mathrm{d}z\cdot p(x)\end{aligned} \tag{26}$$

由式(26)可知，要使$\frac{f_{k,h}(x)}{p(x)}=b$，则需

$$a^2+\beta^2=-\int_0^1\lambda(z)\mathrm{d}z \tag{27}$$

又在式(25)中取 $x=0$ 可得 $q'(0)=a^2+\beta^2$，则由(23)及(24)式有

$$\begin{aligned}a^2+\beta^2=&-\int_0^1 b\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z=\\ &-\left(1-\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s\right)\int_0^1\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

从而可得

$$\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s=\frac{a^2+\beta^2}{\int_0^1\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z}+1$$

由(10)式可得

$$b=\frac{f_{h,k}(x)}{p(x)}=\frac{q'(0)}{a^2+\beta^2}-\int_0^1 q(s)\mathrm{d}s=-\frac{a^2+\beta^2}{\int_0^1\cos(\sqrt{a^2+\beta^2}z)\lambda(z)\mathrm{d}z} \tag{28}$$

由式(16),(20)及(22)可得

$$h(x, y)=\frac{b}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\cos(ax)\int_y^1\sin(\sqrt{a^2+\beta^2}(z-y))\lambda(z)\mathrm{d}z \tag{29}$$

再由式(14)和(29)有

$$\begin{cases}k_{xx}(x, y)-k_{yy}(x, y)+\alpha k(x, y)=0\\ k(x, x)=\dfrac{\alpha}{2}x\\ k_y(x, 0)=-(a^2+\beta^2)\cos(ax)\end{cases} \tag{30}$$

参考文献[3]中方法可得方程组(30)的解存在，且解 $k(x, y)$ 为有界函数. 由 $x, y\in(0, 1)$ 及(29)式易得核函数 $h(x, y)$ 有界，综上可得如下引理 1.

引理 1 变换(3)将控制系统(1)转化为指数稳定的目标系统(2)，其中，变换(3)中的核函数 $k(x, y)$，$h(x, y)$ 由(29)及(30)式给出，常数 a, b 由(27)和(28)式给出，且核函数 $k(x, y)$，$h(x, y)$ 均为有界函数.

3 逆变换及稳定性

为证明控制系统在反馈控制器(4)下是稳定的，需得到变换(3)的逆变换(5). 本节采用第 2 节类似的方法求解变换(5)中的核函数. 首先，由变换(5)有

$$\begin{aligned}&\int_0^1\lambda(y)u(y, t)\mathrm{d}y=\\ &\int_0^1\lambda(y)\Big[w(y, t)+\int_0^y l(y, s)w(s, t)\mathrm{d}s+\int_0^1 r(y, s)w(s, t)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}y=\\ &\int_0^1\lambda(y)w(y, t)\mathrm{d}y+\int_0^1\int_s^1\lambda(y)l(y, s)w(s, t)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\int_0^1\int_0^1\lambda(y)r(y, s)w(s, t)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{31}$$

在变换(5)中等式两边关于 x 和 t 求偏导，同时由目标系统(2)可得

$$\begin{aligned}&u_t(x, t)=\\ &w_t(x, t)+\int_0^x w_t(y, t)\mathrm{d}y+\int_0^1 w_t(y, t)\mathrm{d}y=\\ &w_{xx}(x, t)+l(x, x)w_x(x, t)+[\alpha-l_y(x, x)]w(x, t)+r(x, 1)w_x(1, t)-\\ &r_y(x, 1)w(1, t)+(l_y(x, 0)+r_y(x, 0))w(0, t)+\\ &\int_0^x[l_{yy}(x, y)+\alpha l(x, y)]w(y, t)\mathrm{d}y+\int_0^1[r_{yy}(x, y)+\alpha r(x, y)]w(y, t)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{32}$$

和

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, t)=&w_{xx}(x, t)+l'(x, x)w(x, t)+l(x, x)w_x(x, t)+l_x(x, x)w(x, t)+\\ &\int_0^x l_{xx}(x, y)w(y, t)\mathrm{d}y+\int_0^1 r_{xx}(x, y)w(y, t)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{33}$$

变换(5)将目标系统(2)转化为控制系统(1)，则式(31)-(33)应满足控制系统(1)的方程 $u_t(x, t)-u_{xx}(x, t)-\int_0^1\lambda(y)u(y, t)\mathrm{d}y=0$，即

$$\begin{aligned}&u_t(x, t)-u_{xx}(x, t)-\int_0^1\lambda(y)u(y, t)\mathrm{d}y=\\ &\int_0^1\Big(r_{yy}(x, y)-r_{xx}(x, y)+\alpha r(x, y)-\lambda(y)-\int_y^1\lambda(s)l(s, y)\mathrm{d}s-\int_0^1\lambda(s)r(s, y)\mathrm{d}s\Big)w(y, t)\mathrm{d}y+\\ &(l_y(x, 0)+r_y(x, 0))w(0, t)-\int_0^x(l_{xx}(x, y)-l_{yy}(x, y)-\alpha l(x, y))w(y, t)\mathrm{d}y+\\ &r(x, 1)w_x(1, t)+(\alpha-2l'(x, x))w(x, t)-r_y(x, 1)w(1, t)=0\end{aligned}$$

因此，逆变换(5)中的核函数 $l(x, y)$，$r(x, y)$ 满足如下方程组

$$\begin{cases} l'(x, x) = \dfrac{\alpha}{2},\ r(x, 1) = 0,\ r_y(x, 1) = 0 \\ l_y(x, 0) + r_y(x, 0) = 0 \\ l_{xx}(x, y) - l_{yy}(x, y) - \alpha l(x, y) = 0 \\ r_{yy}(x, y) - r_{xx}(x, y) + \alpha r(x, y) - g(y) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

其中 $g(y) = \lambda(y) + \int_y^1 \lambda(s) l(s, y) \mathrm{d}s + \int_0^1 \lambda(s) r(s, y) \mathrm{d}s$.

又变换(5) 中的 $u(x, t)$ 满足控制系统(1) 中的边界条件，从而有

$$u_x(0, t) = l(0, 0) w(0, t) + \int_0^1 r_x(0, y) w(y, t) \mathrm{d}y = 0$$

因此有 $l(0, 0) = 0$，$r_x(0, y) = 0$，再由方程组(33) 中的边界条件 $l'(x, x) = \dfrac{\alpha}{2}$，可得 $l(x, x) = \dfrac{\alpha}{2}x$，故核函数 $l(x, y)$ 满足下面的方程组

$$\begin{cases} l_{xx}(x, y) - l_{yy}(x, y) - \alpha l(x, y) = 0 \\ l_y(x, 0) = - r_y(x, 0) \\ l(x, x) = \dfrac{\alpha}{2}x \end{cases} \tag{35}$$

再由方程组(34) 可得核函数 $r(x, y)$ 满足如下方程组

$$\begin{cases} r_{yy}(x, y) - r_{xx}(x, y) + \alpha r(x, y) - g(y) = 0 \\ r(x, 1) = 0,\ r_y(x, 1) = 0,\ r_x(0, y) = 0 \end{cases} \tag{36}$$

类似地采用偏微分方程的变量分离法求解核函数 $r(x, y)$. 设 $r(x, y) = m(x) n(y)$，并将 $g(y)$ 代入式(36) 有

$$\begin{cases} m(x) n''(y) - m''(x) n(y) + \alpha m(x) n(y) - \lambda(y) - \int_y^1 \lambda(s) l(s, y) \mathrm{d}s - \int_0^1 \lambda(s) m(s) n(y) \mathrm{d}s = 0 \\ n(1) = 0,\ n'(1) = 0,\ m'(0) = 0 \end{cases}$$

为得到以上方程组的解及简化运算，不妨设 $m(x)$ 为常数，同时边界条件 $m'(0) = 0$ 也得到满足，这里不妨选择 $m(x) = 1$，再由(27) 式可得函数 $n(y)$ 满足方程

$$\begin{cases} n''(y) + a^2 n(y) - \lambda(y) - \int_y^1 \lambda(s) l(s, y) \mathrm{d}s = 0 \\ n(1) = 0,\ n'(1) = 0 \end{cases} \tag{37}$$

解方程(37) 可得

$$r(x, y) = m(x) n(y) = n(y) = \frac{1}{a} \int_y^1 \sin(as - ay) \left(\lambda(s) + \int_s^1 \lambda(\tau) l(\tau, s) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \tag{38}$$

从而有

$$r_y(x, 0) = - \int_0^1 \cos(as) \left(\lambda(s) + \int_s^1 \lambda(\tau) l(\tau, s) \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}s \tag{39}$$

将式(39) 代入核函数 $l(x, y)$ 满足的方程组(35) 式可得

$$\begin{cases} l_{xx}(x, y) - l_{yy}(x, y) - \alpha l(x, y) = 0 \\ l_y(x, 0) = \int_0^1 \cos(as) \lambda(s) \mathrm{d}s - \int_0^1 \int_s^1 \lambda(z) l(z, s) \mathrm{d}z \mathrm{d}s \\ l(x, x) = \dfrac{\alpha}{2}x \end{cases} \tag{40}$$

下面通过变量代换将方程(40) 转化成积分方程进行求解，引入变量代换

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y$$

令

$$G(\xi, \eta) = l(x, y) = l\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2} \right)$$

$G(\xi, \eta)$ 满足方程组

$$\begin{cases} G_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \dfrac{\alpha}{4} G(\xi, \eta) \\ G(\xi, 0) = \dfrac{\alpha}{4}\xi \\ G_{\xi}(\xi, \xi) - G_{\eta}(\xi, \xi) = \displaystyle\int_0^1 \cos(as)\lambda(s)\mathrm{d}s - \int_0^1\int_s^1 \lambda(\tau)G(\tau+s, \tau-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \end{cases} \tag{41}$$

对方程(41)等号两边关于 η 在 $[0, \xi]$ 上积分，有

$$G_{\xi}(\xi, \xi) = G_{\xi}(\xi, 0) + \frac{\alpha}{4}\int_0^{\xi} G(\xi, s)\mathrm{d}s = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4}\int_0^{\xi} G(\xi, s)\mathrm{d}s \tag{42}$$

再由式(41)中的边界条件有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}G(\xi, \xi)}{\mathrm{d}\xi} = & G_{\xi}(\xi, \xi) + G_{\eta}(\xi, \xi) = \\ & 2G_{\xi}(\xi, \xi) - \int_0^1 \cos(as)\lambda(s)\mathrm{d}s + \int_0^1\int_s^1 \lambda(\tau)G(\tau+s, \tau-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s = \\ & \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\xi} G(\xi, s)\mathrm{d}s - \int_0^1 \cos(as)\lambda(s)\mathrm{d}s + \int_0^1\int_s^1 \lambda(\tau)G(\tau+s, \tau-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{43}$$

在式(43)两边关于 ξ 在 $[0, \eta]$ 上积分，有

$$G(\eta, \eta) = \left[\frac{\alpha}{2} - \int_0^1 \cos(as)\lambda(s)\mathrm{d}s\right]\eta + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\eta}\int_0^{\tau} G(\tau, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \eta\int_0^1\int_s^1 \lambda(\tau)G(\tau+s, \tau-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s$$

下面先对方程(41)等号两边关于 η 在 $[0, \eta]$ 上积分，再关于 ξ 在 $[\eta, \xi]$ 上积分，有

$$\begin{aligned} G(\xi, \eta) = & G(\eta, \eta) + \frac{\alpha}{4}(\xi - \eta) + \frac{\alpha}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_0^{\eta} G(\tau, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \\ & \left[\frac{\alpha}{2} - \int_0^1 \cos(as)\lambda(s)\mathrm{d}s + \int_0^1\int_s^1 \lambda(\tau)G(\tau+s, \tau-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\eta + \\ & \frac{\alpha}{4}(\xi - \eta) + \frac{\alpha}{2}\int_0^{\eta}\int_0^{\tau} G(\tau, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau + \frac{\alpha}{4}\int_{\eta}^{\xi}\int_0^{\eta} G(\tau, s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{44}$$

由(44)式，利用求解积分方程的逐次逼近法[5]可解得 $G(\xi, \eta)$，从而解得核函数 $l(x, y)$. 由 $x, y \in (0, 1)$ 及(42),(44)式易得如下引理2.

引理2　变换(3)的逆变换存在，并由(5)式给出. 变换(5)将稳定的目标系统(2)转化为控制系统(1)，其中变换(5)中的核函数 $l(x, y)$,$r(x, y)$ 由(38)及(40)式给出，常数 a 由(27)式给出，且核函数 $l(x, y)$，$r(x, y)$ 均为有界函数.

最后，利用引理1、引理2、核函数的有界性以及目标系统的稳定性，运用文献[6]中同样的方法，选取 L^2 范数，易得如下定理.

定理　当 $\lambda(y) < 0$ 时，核函数 $k(x, y)$,$h(x, y)$ 由(29)及(30)式给出，常数 a,b 由(27)和(28)式给出，控制的输入 $U(t)$ 由(4)式给出，那么闭环系统(1)在 L^2 范数意义下达到指数稳定.

4　结　　论

讨论了一类用于描述吸热化学反应器的反应扩散系统的稳定性问题，在研究过程中为求解核函数采用了一系列较复杂的数学技巧，其中运用了求解偏微分方程的变量分离法和求解积分方程的逐次逼近法，通过这些方法验证了核函数的存在性以及有界性，从而得到 Volterra 型积分变换及其逆变换，再利用核函数的有界性，同时借助相关文献类似的方法可证明反馈控制器的有效性.

参考文献:

[1]　BOSKOVIC D M, KRSTIC M. Backstepping Control of Chemical Tubular Reactors [J]. Computers and Chemical Engineering, 2002, 26(7): 1077-1085.

[2]　BOSKOVIC D M, KRSTIC M. Stabilization of a Solid Propellant Rocket Instability by State Feedback [J]. International

Journal of Robust and Nonlinear Control，2003，13(5)：484－495.
[3] KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Boundary Control of PDEs：A Course on Backstepping Designs [M]. Philadelphia：Society for Industrial and Applied Mathematics，2008.
[4] KRSTIC M. Compensating Actuator and Sensor Dynamics Governed by Diffusion PDEs [J]. Systems & Control Letters，2009，58(5)：372－377.
[5] LIU W J. Boundary Feedback Stabilization of an Unstable Heat Equation [J]. SIAM Journal on Control and Optimization，2003，42(3)：1033－1043.
[6] GUO C L，XIE C K，ZHOU Z C. Stabilization of a Spatially Non-Causal Reaction-Diffusion Equation by Boundary Control [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control，2014，24(1)：1－17.
[7] ZHOU Z C，GUO C L. Stabilization of Linear Heat Equation with a Heat Source at Intermediate Point by Boundary Control [J]. Automatic，2013，49(2)：448－456.
[8] KRSTIC M. Delay Compensation for Nonlinear，Adaptive，and PDE Systems [M]. Berlin：Birkhauser Boston，2009.
[9] KRSTIC M，SMYSHLYAEV A. Backstepping Boundary Control for First Order Hyperbolic PDEs and Application to Systems with Actuator and Sensor Delays [J]，Systems & Control Letters，2008，57(9)：750－758.
[10] SUSTO G A，KRSTIC M. Control of PDE-ODE Cascades with Neumann Interconnections [J]. Journal of the Franklin Institute，2010，347(1)：284－314.
[11] TANG S X，XIE C K. State and Output Feedback Boundary Control for a Coupled PDE-ODE System [J]. Systems & Control Letters，2011，60(8)：540－545.
[12] 郭春丽，周中成. 一类内部点级联的 PDE-ODE 系统的边界控制 [J]. 控制理论与应用，2014，31(6)：779－785.
[13] 赵　娜，谢成康，司元超. 一类级联系统的边界控制 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(1)：93－98.
[14] 甄致远，谢成康，何翠华. 一类多输入多输出级联系统的边界控制 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(5)：119－124.

Stabilization of a Spatially Non-Causal Reaction-Diffusion Equation by Boundary Control

GUO Chun-li

School of mathematics，School of Sichuan University of Arts and Science，Dazhou Sichuan 635000，China

Abstract：Stabilization of a reaction-diffusion equation，in which the heat source depends on the temperature of the whole space，is considered by boundary control. The system is more complicated. For the new system，a new Volterra transformation is introduced，in which there are two kernels. Through a solution of separated variables，the exact solutions of kernels are obtained，and a control law is obtained specifically. The inverse transformation is derived，and stability of the closed loop system established via the boundedness of transformation and the inverse transformation.

Key words：reaction-diffusion equation；Volterra transformation；stability；boundary control

责任编辑　张　枸