

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.09.011

UR 机器人运动学与奇异摄动算法研究^①

李 影¹, 王 波¹, 曹成涛²

1. 仰恩大学 工程技术学院, 福建 泉州 362014; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640

摘要: 首先分析了 UR 机器人的机械结构; 其次通过数值迭代法对 UR 机器人的逆运动学进行了求解, 严格控制了算法的精度和速度, 验证了算法的正确性和快速性; 再次提出了一种基于奇异摄动的控制方法, 通过振动抑制方法将系统分为快慢两个子系统, 实现降阶作用; 最后绘制了正、逆运动算法的机械臂轨迹曲线, 同时针对降阶后的系统设计控制器进行系统分析. 实验结果验证了算法的有效性和精确性.

关键词: 六自由度; UR 机器人; 运动学仿真; D-H 法; 奇异摄动

中图分类号: TP242.3

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)09-0065-09

机器人的运动控制以及奇异摄动已经脱离了理论阶段, 逐渐走向了现场应用^[1-2]. 一般来说, 机器人手臂在与人协调操作或进行工件抓取时, 应当尽量避免机械本体振动和运动过程中的轨迹抖动^[3-4]. 如何保障机器人作业的正常执行以及提高机器人的工作效率是一个关键性问题^[5]. 人机协作 UR 机器人成为了国内外机器人厂商的研发热点^[6].

本文对六自由度 UR 机器人的机械结构进行了特征分析, 采用传统的 D-H 方法建立了关节连杆坐标系, 采用了有别于传统形式的数值迭代法解决运动学逆解问题. 经过验证, 本文算法的运算开销可保证在 ms 数量级, 可以最大程度保证机器人运动控制系统的实时性需求, 最后通过实验对算法的有效性进行了验证.

1 仿人手臂

1.1 机器人机械结构

如图 1 所示, UR 机器人的运动控制系统具有开放的特点, 这为今后的软件升级与维护提供了极大的便利^[7-9]. 机械臂的本体部分, 采用了自主研发的一体化关节. 独特的小型化设计以及中空结构有助于电缆的内部设计布局, 可实现对本体构造的整体简化, 可以根据不同的需求对减速机、电机进行最优化配置.

1.2 手臂机械结构

六自由度 UR 机器人的运动学建模就是建立各个关节与末端执行器之间的位姿映射关系. 图 2 为根据机器人的关节分布特性绘制的机器人各个局部坐标系分布图^[7].

2 运动算法研究

建立机械臂的连杆 D-H 参数(表 1), 据此构建 UR 机器人的运动学模型, 其中 a_i 表示连杆的转角, α_i 表示连杆的长度, d_i 表示连杆的偏距, θ_i 表示关节电机转角.

① 收稿日期: 2018-02-12

基金项目: 福建省教育厅高等学校应用型学科培育项目; 2017 福建省本科高校重大教育教学改革研究项目(FBJG20170286); 国家星火计划项目(2015GA780024).

作者简介: 李 影(1981-), 女, 讲师, 硕士, 主要从事机器人控制等研究.

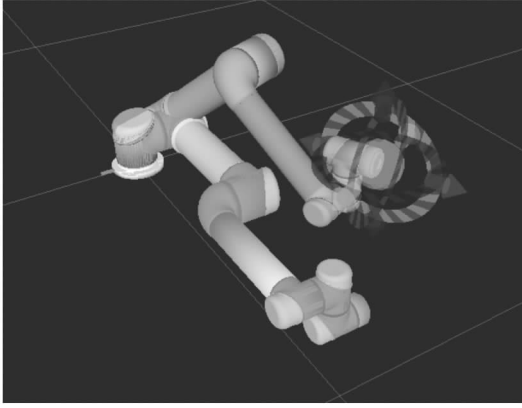


图 1 UR 机器人结构图

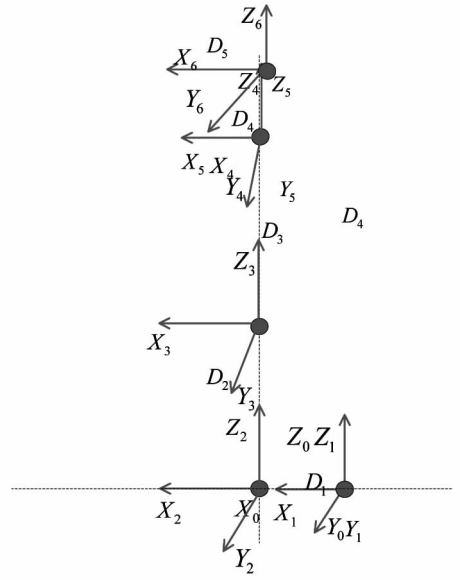


图 2 UR 机械臂运动学坐标系分布

表 1 机械臂的连杆 D-H 参数

关节轴	连杆转角/ $^{\circ}$	连杆长度/m	连杆偏距/m	关节角/ $^{\circ}$
i	a_{i+1}	a_{i+1}	d_{i+1}	θ_{i+1}
1	90	0	d_1	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	0	a_3	0	θ_3
4	90	0	d_4	θ_4
5	-90	0	d_5	θ_5
6	0°	0	d_6	θ_6

2.1 手臂运动学正解

参照表 1 中各项参数, 可得到各个关节之间的变换矩阵如下:

$${}^0_6\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}_1 {}^1_2\mathbf{T}_2 {}^2_3\mathbf{T}_3 {}^3_4\mathbf{T}_4 {}^4_5\mathbf{T}_5 {}^5_6\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中矩阵左上方的 $\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$ 3 维分块矩阵中的 9 个元素表示机器人末端的空间姿态, 右侧向量 $\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$ 的 3 个元素表示机器人末端的空间位置^[7-8].

根据各个关节的空间几何关系可以获得相邻两个坐标系的变换矩阵:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & a_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & -s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显示结论为:

$$\begin{cases} {}^0_6 n_x = c_6 (s_1 s_5 + c_{234} c_1 c_5) - s_{234} c_1 s_6 \\ {}^0_6 n_y = -c_6 (c_1 s_5 - c_{234} c_5 s_1) - s_{234} s_1 s_6 \\ {}^0_6 n_z = c_{234} s_6 + s_{234} c_5 c_6 \\ {}^0_6 o_x = -s_6 (s_1 s_5 + c_{234} c_1 c_5) - s_{234} c_1 c_6 \\ {}^0_6 o_y = s_6 (c_1 s_5 - c_{234} c_5 s_1) - s_{234} c_6 s_1 \\ {}^0_6 o_z = c_{234} c_6 - s_{234} c_5 s_6 \\ {}^0_6 a_x = c_5 s_1 - c_{234} c_1 s_5 \\ {}^0_6 a_y = -c_1 c_5 - c_{234} s_1 s_5 \\ {}^0_6 a_z = -s_{234} s_5 \\ {}^0_6 p_x = c_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) + d_4 s_1 + d_6 (c_5 s_1 - c_{234} c_1 s_5) + d_5 s_{234} c_1 \\ {}^0_6 p_y = s_1 (a_3 c_{23} + a_2 c_2) - d_4 c_1 - d_6 (c_1 c_5 + c_{234} s_1 s_5) + d_5 s_{234} s_1 \\ {}^0_6 p_z = d_1 + a_3 s_{23} + a_2 s_2 - d_5 c_{234} - d_6 s_{234} s_5 \end{cases} \quad (1)$$

其中: α_2 和 α_3 表示连杆 2 和连杆 3 的长度; d_1, d_4 和 d_5 表示连杆 1、连杆 4 和连杆 5 的偏距. 各个角代数和的正余弦如下:

$$\begin{aligned} c_{23} &= \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ s_{23} &= \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ c_{234} &= \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \\ s_{234} &= \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \end{aligned}$$

2.2 手臂运动学反解

求解第一轴 θ_1 的关节值(两个解):

$$\begin{cases} A = d_6 T_{12} - T_{13} \\ B = d_6 T_{02} - T_{03} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ \theta_1 = \arccos \frac{d_4}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \operatorname{atan}\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \\ \theta_1 = \pm \arccos \frac{d_4}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \operatorname{atan}\left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \end{cases} \quad (2)$$

求解第五轴 θ_5 的关节值(两个解):

$$\begin{aligned} {}^0_6 p_x s_1 - {}^0_6 p_y c_1 &= d_4 + d_6 c_5 \\ \theta_5 &= \pm \arccos \frac{{}^0_6 p_x s_1 - {}^0_6 p_y c_1 - d_4}{d_6} \end{aligned} \quad (3)$$

求解第六轴 θ_6 的关节值(一个解), 需先引入肘部关节翻转与否标识:

$$\begin{cases} {}^0_6 n_x s_1 - {}^0_6 n_y c_1 = T_{00} s_1 - T_{10} c_1 = c_6 s_5 \\ {}^0_6 o_x s_1 - {}^0_6 o_y c_1 = T_{01} s_1 - T_{11} c_1 = -s_6 s_5 \\ \theta_6 = \operatorname{atan}(-{}^0_6 o_x s_1 + {}^0_6 o_y c_1, {}^0_6 n_x s_1 - {}^0_6 n_y c_1) = \operatorname{atan}(s_6 s_5, c_6 s_5) \end{cases} \quad (4)$$

求解第三轴 θ_3 的关节值(两个解):

$$\begin{cases} p_{13}x = d_5(s_6(T_{00}c_1 + T_{10}s_1) + c_6(T_{01}c_1 + T_{11}s_1)) - d_6(T_{02}c_1 + T_{12}s_1) + T_{03}c_1 + T_{13}s_1 \\ p_{13}y = T_{23} - d_1 - d_6T_{22} + d_5(T_{21}c_6 + T_{20}s_6) \\ \theta_3 = \pm \arccos((p_{13}xp_{13}x + p_{13}yp_{13}y - a_2a_2 - a_3a_3)/(2.0a_2a_3)) \end{cases} \quad (5)$$

求解第二轴 θ_2 的关节值(一个解):

$$\begin{cases} Ap_{13}y - Bp_{13}x = s_2(a_2a_2 + a_3a_3 + 2a_2a_3c_3) \\ Ap_{13}x + Bp_{13}y = c_2(a_2a_2 + a_3a_3 + 2a_2a_3c_3) \\ \theta_2 = \operatorname{atan2}((Ap_{13}y - Bp_{13}x)/\operatorname{denom} = (Ap_{13}x + Bp_{13}y)/\operatorname{denom}) \end{cases} \quad (6)$$

求解第四轴 θ_4 的关节值(一个解):

$$\begin{cases} x_{04}x = -s_5(T_{02}c_1 + T_{12}s_1) - c_5(s_6(T_{01}c_1 + T_{11}s_1) - c_6(T_{00}c_1 + T_{10}s_1)) \\ x_{04}y = c_5(T_{20}c_6 - T_{21}s_6) - T_{22}s_5 \\ \begin{cases} c_{23}x_{04}y - s_{23}x_{04}x = c_{23}s_{234} - s_{23}c_{234} \\ x_{04}xc_{23} + x_{04}ys_{23} = c_{23}c_{234} + s_{23}s_{234} \end{cases} \\ \theta_4 = \operatorname{atan2}(c_{23}x_{04}y - s_{23}x_{04}x = x_{04}xc_{23} + x_{04}ys_{23}) \end{cases} \quad (7)$$

3 基于奇异摄动法的机器人运动控制

3.1 机器人的奇异摄动模型

标准的机器人关节转矩系统的动力学模型不具备奇异摄动模型形式,需要通过线性变换将其化为奇异摄动模型的形式,然后才能按奇异摄动方法设计控制器^[7-9].表2为工业机器人的机械参数.

表2 机器人的机械参数

轴	质量 /kg	惯性张量 /($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)		
1	326.28	$I_{xx} = 139.59$	$I_{xy} = 0.66$	$I_{xz} = -1.52$
		$I_{yy} = 0.66$	$I_{yz} = 130.47$	$I_{yz} = -25.64$
		$I_{zx} = -1.52$	$I_{zy} = -25.64$	$I_{zz} = 15.25$
2	167.82	$I_{xx} = 56.35$	$I_{xy} = -0.54$	$I_{xz} = 4.49$
		$I_{yy} = -0.54$	$I_{yz} = 56.10$	$I_{yz} = -2.64$
		$I_{zx} = 4.49$	$I_{zy} = -2.64$	$I_{zz} = 2.51$
3	94.80	$I_{xx} = 17.04$	$I_{xy} = -0.04$	$I_{xz} = 0.06$
		$I_{yy} = -0.04$	$I_{yz} = 16.07$	$I_{yz} = 0.82$
		$I_{zx} = 0.06$	$I_{zy} = 0.82$	$I_{zz} = 1.02$
4	51.64	$I_{xx} = 1.02$	$I_{xy} = 1.17$	$I_{xz} = -0.00$
		$I_{yy} = 1.17$	$I_{yz} = 3.59$	$I_{yz} = -0.00$
		$I_{zx} = -0.00$	$I_{zy} = -0.00$	$I_{zz} = 4.44$
5	28.1406	$I_{xx} = 0.08452$	$I_{xy} = 0.0003$	$I_{xz} = -0.0005$
		$I_{yy} = 0.0003$	$I_{yz} = 1.5920$	$I_{yz} = -0.0000$
		$I_{zx} = -0.0005$	$I_{zy} = -0.0000$	$I_{zz} = 1.5713$
6	0.78	$I_{xx} = 0.22$	$I_{xy} = 0.02$	$I_{xz} = -0.00$
		$I_{yy} = 0.02$	$I_{yz} = 0.07$	$I_{yz} = 0.00$
		$I_{zx} = -0.00$	$I_{zy} = 0.00$	$I_{zz} = 0.23$

本节将根据机器人系统的性质和线性变换推导出机器人系统的奇异摄动模型,暂不考虑摩擦影响,机器人关节转矩系统的动力学简化模型为:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + g(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_{ext} \quad (8)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{J}_m\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_m \quad (9)$$

其中: $\boldsymbol{\tau}_m$ 为电机转矩,由电机转矩公式可知 $\boldsymbol{\tau}_m = \frac{3}{2}n_p\boldsymbol{\Psi}_{fi}i_{sq}$; $\boldsymbol{\tau}$ 为机器人关节转矩,由基于扰动观测器的关

节转矩检测可知 $\dot{\theta} = \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\dot{\tau} + \mathbf{N}\dot{q}$. 考虑安装关节转矩传感器的情况, 关节转矩 $\dot{\theta} = \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\dot{\tau} + \mathbf{N}\dot{q}$, 其中 K 为关节刚度. 比较关节转矩的两种表达式可以看出, 关节角度 q 可以通过转矩观测器的输出与电机转角求出.

为得到 UR 机器人奇异摄动的标准模型, 需要重新考虑坐标变量^[9]. 慢变量选取为机器人的关节角度 q 及其微分, 快变量选取为关节转矩 τ 及其微分, 得到 z_1, z_2 为:

$$z_1 = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad z_2 = \begin{pmatrix} \tau \\ \dot{\tau} \end{pmatrix}$$

然后, 代入 $\dot{\theta} = \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\dot{\tau} + \mathbf{N}\dot{q}$ 以及 $\dot{\theta} = \mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\dot{\tau} + \mathbf{N}\dot{q}$ 到方程(8) 得到:

$$\mathbf{N}^2 \mathbf{J}_m \mathbf{K}^{-1} \ddot{\tau} + \tau = \mathbf{N} \tau_m - \mathbf{N}^2 \mathbf{J}_m \dot{q}$$

由于惯性矩阵为对称正定矩阵, 因而是可逆的, 化简得到:

$$\mathbf{K}^{-1} \ddot{\tau} + (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^2 + \mathbf{M}(q)^{-1}) \tau = \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} \tau_m + \mathbf{M}(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \tau_{ext})$$

为了得到系统的奇异摄动模型形式, 需要引入小参数 ϵ . 关节刚度 \mathbf{K} 往往很高, 因而可以用 $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{K}_\epsilon}{\epsilon^2}$ 代替 K , 其中 \mathbf{K}_ϵ 为正定对角矩阵. 小参数 ϵ 的值代表关节具有高刚度. 代入 \mathbf{K} 的表达式并整理, 可以得到系统的奇异摄动模型为:

$$\epsilon^2 \tau + \mathbf{K}_\epsilon (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}) \tau = \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} \tau_m + \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{M}(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \tau_{ext}) \quad (10)$$

可以看出, 引入小参数 ϵ 后系统方程可转化为标准奇异摄动模型.

当 $\epsilon = 0$ 时, 可以得到关节力矩的准稳态解 $\bar{\tau} = h(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$:

$$h(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(\bar{q})^{-1})^{-1} (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} \bar{\tau}_m + \mathbf{M}(\bar{q})^{-1} C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} + G(\bar{q}) - \tau_{ext}) \quad (11)$$

将(11) 式代入方程(10), 并在代入后的方程两边乘以 $\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}$ 算子, 可得系统的准稳态模型为:

$$(\mathbf{M}(\bar{q}) + \mathbf{N}^2 \mathbf{J}_m) \ddot{\bar{q}} + C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} + G(\bar{q}) = \mathbf{N} \bar{\tau}_m + \bar{\tau}_{ext}$$

为了推导系统的边界层模型, 引入新的坐标变量 $y \in \mathbb{R}^n$, 进行坐标代换:

$$y = \tau - h(q, \dot{q}, t)$$

y 与偏离准稳态值的实际转矩值对应. 将新的坐标变量代入得到:

$$\epsilon^2 \ddot{y} + \mathbf{K} (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}) (y + h(q, \dot{q}, t)) = \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} \tau_m + \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{M}(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \tau_{ext})$$

引入新的时间尺度 $v = \frac{t - t_0}{\epsilon}$, 令 $\epsilon = 0$, 得到:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \mathbf{K}_\epsilon (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}) (y + h(q, \dot{q}, t)) = \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} \tau_m + \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{M}(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \tau_{ext}) \quad (12)$$

在 v 时间尺度下, 系统的状态变量以及扰动输入 τ_{ext} 被当做值固定的量. 由公式中 $h(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ 的定义可知:

$$(\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}) h(q, \dot{q}, t) = \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} \bar{\tau}_m + \mathbf{M}(q)^{-1} (C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \bar{\tau}_{ext})$$

将其代入(12) 式, 得到最终的系统边界层模型为:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + \mathbf{K}_\epsilon (\mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-2} + \mathbf{M}(q)^{-1}) y = \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{J}_m^{-1} \mathbf{N}^{-1} (\tau_m - \bar{\tau}_{ext}) \quad (13)$$

由于变量 q 在边界层模型中被认为是值固定的量, 机器人的边界层模型成为线性时不变系统.

3.2 基于奇异摄动的控制器设计

基于奇异摄动方法的机器人控制器设计常采用复合反馈设计思路, 具有众多优点. 复合控制器的设计思路如图3 所示, 控制输入 τ_m 被划分为慢系统部分 $\tau_{m, slow}$ 和快系统部分 $\tau_{m, fast}$, 即:

$$\tau_m = \tau_{m, slow} + \tau_{m, fast} \quad (14)$$

这两部分应分别设计,使慢系统部分只影响准稳态模型,而快系统部分只影响边界层模型,两部分控制输入分别对两个子系统进行控制.将控制输入分成快慢两部分的设计思想具有两方面重要的含义.其一,控制输入 $\tau_{m,slow}$ 必须被选择,这就要求系统具有标准型,即准稳态 $\bar{\tau}$ 必须具有唯一解. $\tau_{m,slow}$ 可以选择仅为准稳态模型的状态 (q, \dot{q}) 的函数,而不包括关节转矩 τ 的反馈.其二,控制输入需满足 $\tau_{m,fast} |_{\epsilon \rightarrow 0} = 0$, 否则将影响准稳态模型.

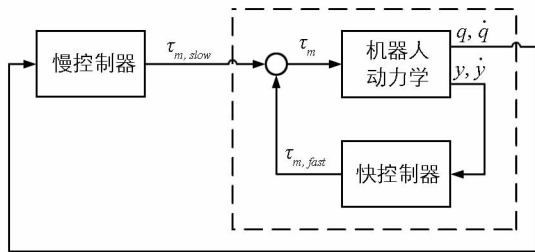


图 3 奇异控制结构图

快慢系统控制输入满足:

$$\begin{aligned}\tau_{m,slow} &= \tau_m |_{\epsilon \rightarrow 0} = \bar{\tau} \\ \tau_{m,fast} &= \tau_m - \bar{\tau}\end{aligned}$$

当以新变量 y 描述转矩动力学的边界层模型是线性时不变时,准稳态模型具有与刚性机器人模型相同的形式.因此刚性机械臂经典的控制器设计方法都可以应用于设计 $\tau_{m,slow}$, 如计算力矩法、扭矩前馈法等.根据 Tychonov 定理,控制器设计的目标一方面要使得边界层模型指数稳定,另一方面要使得准稳态模型的轨迹跟踪误差收敛. Tychonov 定理仅保证轨迹跟踪误差在有限时间间隔内偏离准稳态小于 ϵ 的高阶无穷小,这个结论仅在参数 ϵ 足够小的情况下有效,这就意味着边界层模型要比准稳态模型具有更快的速度.

基于奇异摄动方法的机器人控制器设计中,快系统部分的电机转矩常选择为以下形式:

$$\tau_{m,fast} = -\epsilon D_{\tau} \dot{y}$$

其中 D_{τ} 为正定阻尼矩阵.同时,慢系统部分按照刚性机械臂模型设计控制器,表示为 $-\epsilon D_{\tau} \dot{y}$. 由于边界层系统中 t 与状态变量可以看作固定参数, $-\epsilon D_{\tau} \dot{y}$ 可以改写为 $-\epsilon D_{\tau} \dot{\tau}$. 两种情况都保证满足 $\tau_{m,fast} |_{\epsilon \rightarrow 0} = 0$ 的条件,则机器人总的复合反馈控制器为:

$$\tau_m = \tau_{rigid}(q, \dot{q}) - \epsilon D_{\tau} \dot{\tau}$$

这种控制方法的问题在于控制器仅仅在系统中加入阻尼项,而并没有改善边界层系统的动态行为.为改善这一点,引入转矩偏差反馈:

$$K_{\tau} y = K_{\tau} (\tau - h(q, \dot{q}, t))$$

其中 $h(q, \dot{q}, t)$ 为用于改善边界层动态性能的正定控制增益矩阵,则整个控制器为:

$$\tau_m = \tau_{rigid}(q, \dot{q}) - K_{\tau} y - \epsilon D_{\tau} \dot{\tau} = \tau_{rigid}(q, \dot{q}) - K_{\tau} (\tau - h(q, \dot{q}, t)) - \epsilon D_{\tau} \dot{\tau} \quad (15)$$

然而,为实现这样的反馈需要计算稳定状态 $h(q, \dot{q}, t)$, 这涉及到测量外部作用力 τ_{ext} 以及惯性矩阵 $M(q)$ 的逆矩阵,计算过程非常复杂.

3.3 控制器的改进设计

通过控制器的改进设计, $h(q, \dot{q}, t)$ 的详尽计算可以被避免^[7]. 将控制器分解为如下形式:

$$\tau_m = \tau_{ss}(q, \dot{q}) - K_{\tau} \tau - \epsilon D_{\tau} \dot{\tau}$$

其中: K_{τ} 与 D_{τ} 为正定控制增益矩阵; $\tau_{ss}(q, \dot{q})$ 为准稳态模型的实时控制输入; $K_{\tau} \tau$ 代替公式中的 $K_{\tau} y$, 一方面影响快系统部分的控制输入 $\tau_{m,fast}$, 另一方面影响慢系统部分的控制输入 $\tau_{m,slow}$. 以下分别介绍这两部分的设计.

3.3.1 修改的准稳态系统

方程在 $\epsilon = 0$ 的情况下,得到:

$$\tau_{m,slow} = \tau_{ss}(q, \dot{q}) - K_{\tau} h(q, \dot{q}, t) = \tau_{ss}(q, \dot{q}) - K_{\tau} \bar{\tau}$$

可以看出慢控制量 $\tau_{m,slow}$ 也包括了准稳态转矩 $\bar{\tau}$, 可得到如下关系:

$$(M(\bar{q}) + (I + K_{\tau})^{-1} N^2 J_m) \ddot{\bar{q}} + C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \dot{\bar{q}} + G(\bar{q}) = (I + K_{\tau})^{-1} N \tau_{ss}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \quad (16)$$

函数 $\tau_{ss}(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ 可被选择为 $\tau_{ss}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = N^{-1}(I + K_\tau)\tau_d$, τ_d 作为一个新的控制输入可以依据刚性机器人来设计控制律. 则完整控制律可以被写为如下形式:

$$\tau_m = \tau_d - K_\tau(\tau - \tau_d) - \epsilon D_\tau \dot{\tau}$$

闭环控制系统为:

$$\tau_{m, fast} = -K_\tau(\tau - \dot{\tau}) - \epsilon D_\tau \dot{\tau} = K_\tau y - \epsilon D_\tau \dot{\tau} \quad (17)$$

新的准稳态系统的惯性矩阵依赖于控制增益矩阵 K_τ , 并且通过 K_τ 也能调整电机转子惯量的分配系数, 从而改善系统的控制响应.

3.3.2 修改的边界层系统

根据快系统部分的控制输入形式

$$\tau_{m, fast} = -K_\tau(\tau - \dot{\tau}) - \epsilon D_\tau \dot{\tau} = K_\tau y - \epsilon D_\tau \dot{\tau}$$

可得到边界层系统如下:

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + K_\epsilon J_m^{-1} N^{-1} D_\tau \frac{dy}{dv} + K_\epsilon J_m^{-1} (N^{-2} + J_m M(q)^{-1} + N^{-1} K_\tau) y = 0 \quad (18)$$

可以看出, 正定矩阵 K_τ 和 D_τ 可被用于线性时不变边界层系统动力学的整定, 使其满足 Tychonov 定理所要求的指数稳定条件.

4 实验结果及分析

4.1 机械臂仿真

根据 UR 机器人手臂的结构特征, 通过 Elmo 驱动器软件直接采集机械手臂的位置曲线. 将位置曲线保存为文本文件; 同时将机器人各个关节值保存至机器人的内存卡中. 最后将 Elmo 驱动器的位置曲线代入到控制器的规划器当中去, 通过逆解得到关节值. 将一系列的空间位置点插补为一条空间中的曲线. 算法的效果与两条曲线的重合程度是正相关的. 通过运动学算法分别套用, 对圆弧轨迹及正弦轨迹曲线的跟踪效果见图 4.

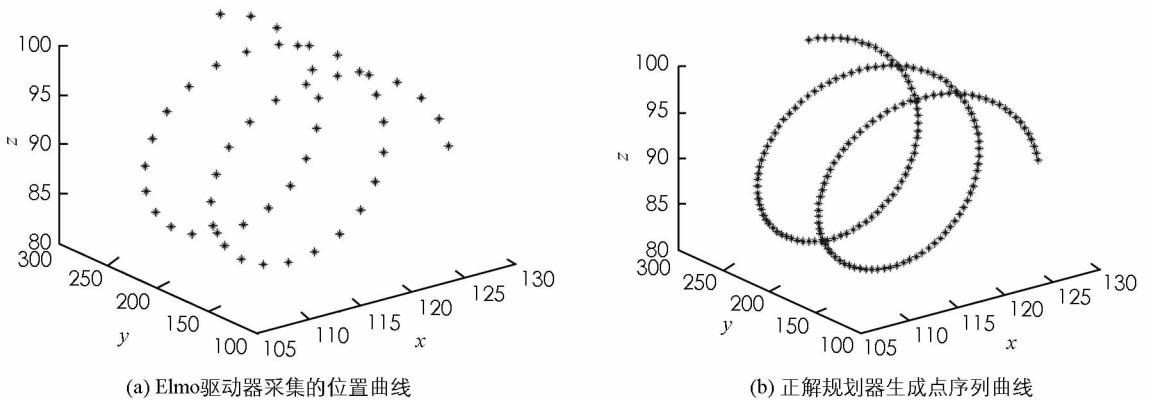


图4 运动学曲线对比

图 4(a) 中, Elmo 驱动器的位置曲线代表规划器生成的目标轨迹曲线; 图 4(b) 中, 正解规划生成点序列, 通过连接这些致密的位置点最终可衍变为一条空间曲线. 从图 4 可知, 两条曲线几乎是完全重合的. 通过对曲线上各点进行统计学分析, 其对应的误差具有如下的特点: 数学期望小于 0.001 mm, 方差趋近于零. 若想进一步提高算法的精度, 可以直接增大迭代计算中容差的上限. 从轨迹的跟踪效果上可验证本算法的有效性及其稳定性. 算法可有效降低系统复杂度, 增强收敛速度.

4.2 奇异摄动实验

为验证所设计控制方法的有效性, 实验平台选定为洁净机器人, 分别采用经典的 PD 控制、PD 控制 + 奇异摄动控制进行系统实验. 通过对比两种控制方式下的系统跟踪差、速度曲线、速度差等来验证奇异摄

动控制的作用.

采用经典 PD 控制的系统数据曲线见图 5. 采用经典 PD+奇异摄动控制的系统数据曲线见图 6.

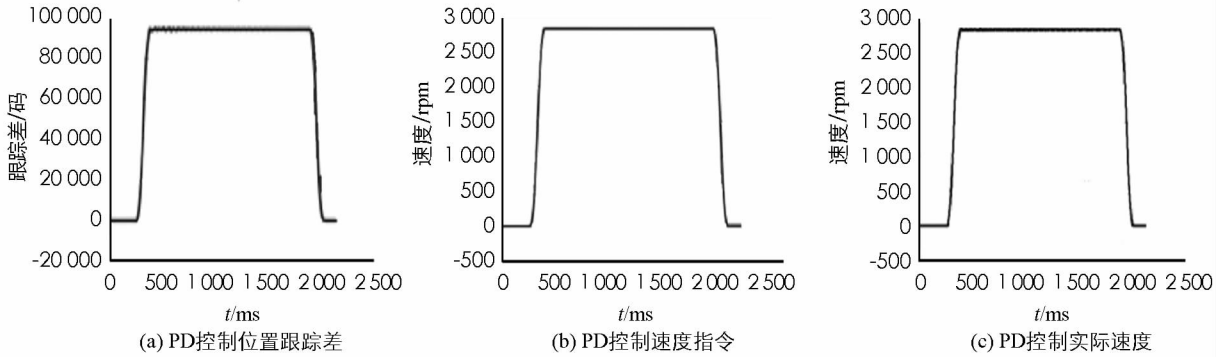


图 5 采用经典 PD 控制的系统数据曲线

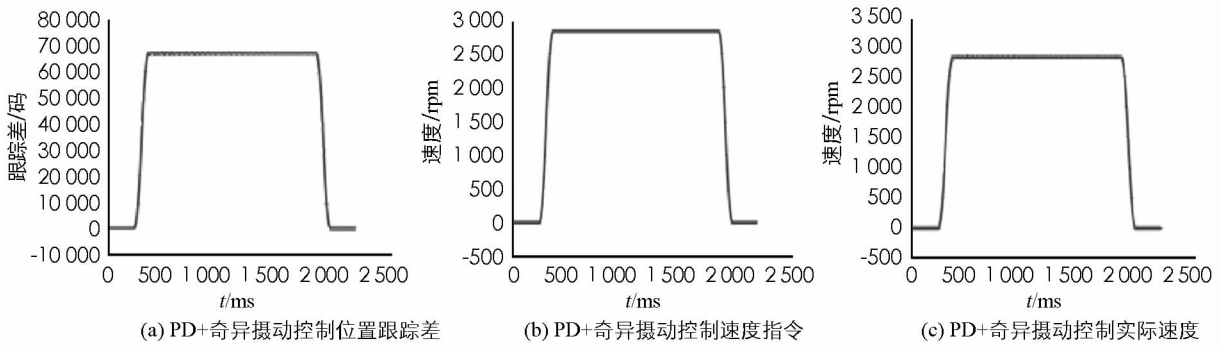


图 6 采用经典 PD+奇异摄动控制的系统数据曲线

两种方法的跟踪特性曲线对比见图 7. 从图 7 可以看出, PD+奇异摄动控制比只采用传统的 PD 控制有较大提升, 系统跟踪差减小约 $\frac{1}{3}$. PD+奇异摄动控制复杂度与传统 PD 控制相差不多, 但响应明显加快.

5 结 论

本文针对 UR 机器人高速稳定运动的问题, 给出了机器人的运动学模型. 针对机械臂本体的结构特征, 首先实现了运动学逆解的高速算法, 并通过对传统奇异摄动模型的分析, 指出了其在强柔性机器人控制中的不足. 本文以提高关节的等效刚度为目的, 设计了关节柔性补偿环节, 从而改进了传统的奇异摄动解决方案, 避免了其局限性.

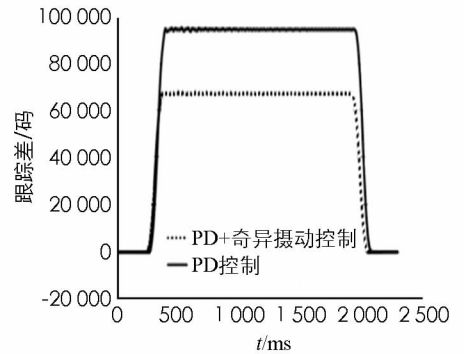


图 7 两种方法的跟踪特性曲线对比

参考文献:

- [1] IWASHITA S, MURASE Y, YASUKAWA Y, et al. Developing a Service Robot [C]//IEEE International Conference Mechatronics and Automation. New York: IEEE Computer Society Press, 2005: 1057-1062.
- [2] JARA C A, CANDELAS F A, GIL P, et al. An Interactive Tool for Industrial Robots Simulation, Computer Vision and remote operation [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2011, 59: 389-401.
- [3] RAGHAVAN M, ROTH B. Kinematics Analysis of the 6R Manipulator of General Geometry [C]//Robotics Research Fifth International Symposium. New York: IEEE Computer Society Press, 1989: 263-269.
- [4] MANSEUR R, DOTY K L. A Robot Manipulator with 16R Real Inverse Kinematic Solution Sets [J]. The International

Journal of Robotics Research, 1989, 8(5): 75–79.

- [5] JIANG J J, FRAANCO P D, ALESSANDRO A. Shared Control for the Kinematic and Dynamic Models of a Mobile Robot [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2016, 24(6): 2112–2124.
- [6] ROLLAND L, CHANARD R. Forward Kinematics of the 6–6 General Parallel Manipulator Using Real Coded Genetic Algorithms [C]//IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. New York: IEEE Computer Society Press, 2009: 1637–1642.
- [7] LEE J, HAN S, LEE J M. Decoupled Dynamic Control for Pitch and Roll Axes of the Unicycle Robot [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2012, 60(9): 3814–3822.
- [8] SKAAR S. B. Robot Modeling and Control-[Book review] [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(2): 378–379.
- [9] CHOI H, RYEW S M. Anthropomorphic Joint Mechanism with Two Degrees of Freedom [C]//San Francisco. Proc IEEE IntConf Robot Autom. New York: IEEE Computer Society Press, 2000: 1525–1530.

On Kinematics and Singular Perturbation Algorithm of UR Robot

LI Ying¹, WANG Bo¹, CAO Cheng-tao²

1. College of Engineering and Technology, Yann University, QuanzhouFujian362014, China;

2. School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China

Abstract: In this paper, UR robot's motion control and singular perturbation algorithm are studied in depth. First, paper analyses mechanical structure of the UR robot; secondly, the inverse kinematics of UR robot are solved through numerical iteration method, and verify the correctness and speed of algorithm based on strictly control the accuracy and speed of the algorithm. Then, a control method is proposed based on singular perturbation, the system is divided into two fast and slow subsystems to achieve reduction effect through the vibration suppression method. Finally, the manipulator trajectory curve is drawn to base on forward and inverse kinematics algorithm, and system controller reduction order. Experimental results verify the effectiveness and accuracy of the proposed algorithm.

Key words: six DOF; UR robot; Kinematics simulation; D-H method; singular perturbation

责任编辑 张 枸