第 43 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 10 月
Vol. 43　No. 10　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Oct.　2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.001

有限群的 *SS* -可补子群①

常　健，　刘建军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 设 H 是有限群 G 的子群. 如果存在 G 的一个子群 K，使得 $G=HK$ 且 $H \cap K$ 在 K 中 S -拟正规，则称 H 在 G 中 SS -可补. 证明了：(i) 设 p 是整除群 G 阶的最小素因子. 如果存在 G 的一个 Sylow p -子群 P，使得 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS -可补，且 P' 在 G 中 S -拟正规，则 G 是 p -幂零群. (ii) 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含超可解群类 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，H 是群 G 的一个正规子群，使得 $G/H \in \mathscr{F}$. 如果对 H 的每一个 Sylow p -子群 P，P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS -可补，且 P' 在 G 中 S -拟正规，则 $G \in \mathscr{F}$.

关　键　词： SS -可补子群；正规化子；极大子群；饱和群系

中图分类号：O152.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2018)10-0001-04

本文所涉及的群均为有限群. 子群的正规性对群的结构有非常重要的影响，许多群论工作者从不同角度推广子群的正规性，并获得了大量的研究成果. 设 H 是群 G 的子群. 如果对于 G 的任意 Sylow 子群 P，都有 $HP=PH$，则称 H 为 G 的 S -拟正规子群. 文献[1]首次引入这个概念并被很多数学工作者广泛研究及推广. 文献[2]引入了 SS -可补的概念：设 H 是群 G 的子群. 如果存在 G 的子群 K，使得 $G=HK$，且 $H \cap K$ 在 K 中 S -拟正规，则称 H 在 G 中 SS -可补. 应用这一概念，人们获得了非常丰富的研究成果(例如文献[2-3]). 同时，很多学者通过子群的局部性质对群 G 的结构进行了进一步的研究，得到了一些新结果(例如文献[4-6]). 本文主要通过局部子群的 SS -可补性来研究有限群的 p -幂零性和超可解性，并推广了前人的一些结果.

设 $\mathscr{F}$ 是一个群类，如果它满足下列条件：(a) 如果 $G \in \mathscr{F}$ 并且 $N \trianglelefteq G$，那么 $G/N \in \mathscr{F}$；(b) 如果 N_1，$N_2 \trianglelefteq G$ 且使得 $G/N_1, G/N_2 \in \mathscr{F}$，那么 $G/N_1 \cap N_2 \in \mathscr{F}$. 则称 $\mathscr{F}$ 是一个群系.

如果 $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$，有 $G \in \mathscr{F}$，则称群系 $\mathscr{F}$ 是饱和的. 所有术语和符号都是标准的(见文献[7-8]).

1　基本概念及主要引理

引理 1[2, 引理2.4]　设 H 是群 G 的 SS -可补子群，则下列命题成立：

(i) 若 M 是 G 的子群且 $H \leqslant M$，则 H 在 M 中 SS -可补；

(ii) 若 $N \trianglelefteq G$ 且 $N \leqslant H$，则 H 在 G 中 SS -可补当且仅当 H/N 在 G/N 中 SS -可补；

(iii) 设 π 是素数的集合. 若 H 是 G 的 π -子群，N 是 G 的正规 π' -子群，则 HN/N 在 G/N 中 SS -可补.

引理 2[1]和[9, 引理2.2]　设 U 是群 G 的 S -拟正规子群，$H \leqslant G$ 且 $N \trianglelefteq G$，则下列命题成立：

---

① 收稿日期：2018-03-21
基金项目：国家自然科学基金项目(11301426)；重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2018jcyjAX0147).
作者简介：常　健(1994-)，女，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：刘建军，博士，副教授.

(i) 若 $U \leqslant H$，则 U 在 H 中 S-拟正规；

(ii) UK 在 G 中 S-拟正规，且 UK/K 在 G/K 中 S-拟正规；

(iii) 对某个素数 p，若 P 是 G 的 S-拟正规子群，则 $N_G(P) \geqslant O^p(G)$；

(iv) $U \trianglelefteq\trianglelefteq G$.

引理3　设 N 是群 G 的一个正规子群，P 是 G 的一个 Sylow p-子群．如果 P 的每一个极大子群在 $N_G(P)$ 中是 SS-可补的且 $(p, |N|) = 1$，那么 PN/N 的每一个极大子群在 $N_{G/N}(PN/N)$ 中是 SS-可补的．进一步，如果 $N \leqslant P$，那么 P/N 的每一个极大子群在 $N_{G/N}(P/N)$ 中 SS-可补．

证　假设 T/N 是 PN/N 的一个极大子群，由于 $T = T \cap (PN) = (T \cap P)N$，所以

$$p = |PN/N : T/N| = |PN : (T \cap P)N| = |P : T \cap P|$$

比较阶，则有 $T \cap P$ 是 P 的极大子群．又因为

$$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N$$

应用引理1，则 $(T \cap P)N/N = T/N$ 在 $N_G(P)N/N = N_{G/N}(PN/N)$ 中是 SS-可补的．

引理4[10，引理2.6]　设 N 为群 G 的正规子群．如果 $N \cap \Phi(G) = 1$，则 N 的 Fitting 子群 $F(N)$ 为包含在 N 中的 G 的所有极小正规子群的直积．

2　主要结果

定理1　设 p 是整除群 G 阶的最小素因子．如果存在 G 的一个 Sylow p-子群 P，使得 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS-可补，且 P' 在 G 中 S-拟正规，则 G 是 p-幂零群．

证　假设结论不成立，且设 G 为极小阶反例．按下列步骤证明：

步骤1　$O_{p'}(G) = 1$.

如果 $O_{p'}(G) \neq 1$．根据引理3和引理2，$G/O_{p'}(G)$ 满足定理1的条件．因此，由 G 的极小性，$G/O_{p'}(G)$ 是 p-幂零的，从而 G 是 p-幂零的，矛盾．

步骤2　若 $P \leqslant K < G$，则 K 是 p-幂零的．

显然 $N_K(P) = N_G(P) \cap K \leqslant N_G(P)$．由引理1和引理2知，$P$ 的每个极大子群在 $N_K(P)$ 中 SS-可补，且 P' 在 K 中 S-拟正规．因此 K 满足定理1的假设，从而由 G 的极小性得到 K 是 p-幂零的．

步骤3　$O_p(G) \geqslant P' > 1$，G 是 p-可解的且 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$.

设任意的 $Q \in \mathrm{Syl}_q(N_G(P))$，其中 $q \neq p$，那么 $PQ = P \rtimes Q$．若 $PQ = G$，则由文献[2]的定理4.1知，G 是 p-幂零的，矛盾．故只能有 $PQ < G$．由步骤2知，PQ 是 p-幂零的．因此 $PQ = P \times Q$，即 $Q \leqslant C_G(P)$．若 P 为交换群，当 q 取遍 $\pi(N_G(P))$ 时，$N_G(P) = C_G(P)$．由 Burnside 定理，G 为 p-幂零群，矛盾．因此 $P' \neq 1$．又因 P' 在 G 中是 S-拟正规的，根据引理2，$P' \trianglelefteq\trianglelefteq G$．因此，$1 < P' \leqslant O_p(G)$．应用引理3和引理2，$G/O_p(G)$ 满足定理1的假设，由 G 的极小性，$G/O_p(G)$ 是 p-幂零的．这意味着 G 是 p-可解的．根据文献[8]的定理9.3.1和步骤1，我们有 $C_G(O_p(G)) \leqslant O_p(G)$．

步骤4　$G = PQ$，其中 Q 为 G 的一个 Sylow q-子群且 $q \neq p$.

由步骤3和文献[11]的定理6.3.5，对任意的 $q \in \pi(G)$，存在 Sylow q-子群 Q，使得 PQ 为 G 的一个子群．若 $PQ < G$，则由步骤2知 PQ 是 p-幂零的，$O_p(G)Q = O_p(G) \times Q$，即 $Q \leqslant C_G(O_p(G))$．这与步骤3矛盾，所以 $G = PQ$.

步骤5　$\Phi(G) = 1$，$O_p(G) = P'$.

设 N 是 G 的一个极小正规子群．应用引理3和引理2，G/N 满足定理1的假设，由 G 的极小性得到 G/N 是 p-幂零群．若 G 有两个极小正规子群 N_1 和 N_2，则 G/N_1 和 G/N_2 都是 p-幂零的，从而 $G/N_1 \cap N_2 \simeq G$ 也是 p-幂零的，矛盾．因此我们不妨设 G 有唯一的极小正规子群 N．若 $N \leqslant \Phi(G)$，则 $G/\Phi(G)$ 是 p-幂零的．这意味着 G 是 p-幂零的，与 G 的极小性矛盾．因此 $\Phi(G) = 1$．由引理4，$O_p(G) = F(G) = N$ 是 G

唯一的极小正规子群. 由定理 1 的假设，P' 在 G 中 S -拟正规. 根据引理 2，$N_G(P') \geqslant O^p(G)$，那么

$$G = PO^p(G) \leqslant PN_G(P') = N_G(P')$$

即 $P' \trianglelefteq G$. 又由 $O_p(G)$ 的极小正规性，于是 $O_p(G) \leqslant P'$. 又根据步骤 3，从而 $O_p(G) = P'$.

步骤 6　G 是 p -幂零群.

因为 $O_p(G)Q \cap P = O_p(G) = P' \leqslant \Phi(P)$，由著名的 Tate 定理[12]，我们知道 $O_p(G)Q$ 是 p -幂零的. 因此 $O_p(G)Q = O_p(G) \times Q$，这与步骤 3 矛盾. 定理 1 得证.

注 1　下面的一个例子表明了定理 1 中的"P' 在 G 中 S -拟正规"这一条件是必不可少的. 例如，设 $G = \mathrm{PSL}(2, q)$，P 是 G 的 Sylow 2 -子群，其中 $q \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\ 8)$. 由文献[7] 的 Ⅱ，8.27 知 P 在 G 中是自正规的，显然 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中是正规的，因此 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中是 SS -可补的. 但 G 不是 2 -幂零的.

推论 1　设 p 是整除群 G 阶的素因子. 如果对任意的 p 都存在 G 的一个 Sylow p -子群 P，使得 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS -可补，且 P' 在 G 中 S -拟正规，则 G 是超可解型的 Sylow 塔群.

最后的两个定理给出了群 G 是超可解群的充分条件：

定理 2　设 p 是整除群 G 阶的素因子. 如果对任意的 p，都存在 G 的一个 Sylow p -子群 P，使得 P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS -可补，且 P' 在 G 中 S -拟正规，则 G 是超可解群.

证　假设结论不成立，且设 G 为极小阶反例. 应用推论 1，G 是具有超可解型的 Sylow 塔群，因此 G 可解. 设 N 为 G 的极小正规子群. 则 N 为一初等交换 r -群，$r \in \pi(G)$. 由引理 3 和引理 2，G/N 满足定理 2 的假设，由 G 的极小性，G/N 是超可解的. 因为超可解群类是饱和群系，我们不妨设 N 是 G 的唯一极小正规子群且 $N \not\leqslant \Phi(G)$. 因此存在 G 的一个极大子群 M，使得 $G = MN$ 且 $N \cap M = 1$. 设 q 是 G 的阶的最大素因子，Q 为 G 的一个 Sylow q -子群. 再次应用推论 1，$Q \trianglelefteq G$. 由 N 的唯一性，$N \leqslant Q$. 因为

$$Q = O_q(G) \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$$

N 和 M 正规化 $Q \cap M$，我们有 $Q \cap M \trianglelefteq G$. 因此 $Q \cap M = 1$ 或 $N \leqslant Q \cap M$. 若 $N \leqslant Q \cap M$，则

$$N \leqslant M \qquad G = MN = M$$

与 M 的极大性矛盾. 因此 $Q \cap M = 1$. 又因为 $N \cap M = 1$，$|Q| = |N|$，所以 $Q = N$. 设 Q_1 是 Q 的一个极大子群. 若 $Q_1 \neq 1$，则由假设，Q_1 在 $N_G(Q) = G$ 中 SS -可补，即存在 $K_1 \leqslant G$，使得 $G = Q_1 K_1$，且 $Q_1 \cap K_1$ 在 K_1 中 S -拟正规. 因此

$$Q = Q_1(Q \cap K_1) \qquad Q \cap K_1 \trianglelefteq G$$

又由 Q 的极小性，我们有 $Q \cap K_1 = 1$ 或 $Q \leqslant K_1$. 若 $Q \cap K_1 = 1$，则 $Q = Q_1$，矛盾，故 $Q \leqslant K_1$，且 Q_1 在 G 中 S -拟正规. 由引理 2，$N_G(Q_1) \geqslant O^q(G)$，且 Q 是初等交换的，所以 Q_1 是 G 的正规子群，这与 Q 的极小性矛盾，于是 Q 为 q 阶循环群. 又因为 G/Q 是超可解群，所以 G 也是超可解群，矛盾. 定理 2 得证.

定理 3　设 $\mathscr{F}$ 是一个包含超可解群类 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，H 是群 G 的一个正规子群，使得 $G/H \in \mathscr{F}$. 如果对 H 的每一个 Sylow p -子群 P，P 的每个极大子群在 $N_G(P)$ 中 SS -可补，且 P' 在 G 中 S -拟正规，则 $G \in \mathscr{F}$.

证　利用归纳法. 显然 H 满足定理 2 的假设，故 H 是超可解的. 设 p 是整除群 H 阶的最大素因子，P 是 H 的一个 Sylow p -子群，那么 $P\ \mathrm{char}\ H \trianglelefteq G$. 因此 $P \trianglelefteq G$. 考虑商群 G/P，由于 $G/P/H/P \cong G/H$，所以 $G/P/H/P \in \mathscr{F}$. 显然 $(G/P, H/P)$ 满足定理 3 的假设，由归纳假设，$G/P \in \mathscr{F}$. 又由 P 的每一个极大子群在 $N_G(P) = G$ 中 SS -可补，根据文献[2] 的定理 4.2，$G \in \mathscr{F}$. 定理 3 得证.

参考文献：

[1]　KEGEL O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler Endlicher Gruppen [J]. Math Z，1962，78(1)：205－221.

[2]　GUO X Y，LU J. On *SS*-Supplemented Subgroups of Finite Groups and Their Properties [J]. Glasgow Math J，2012，54(3)：481－491.

[3]　LU J K，QIU Y Y. On Solvability of Finite Groups with Some *ss*-Supplemented Subgroups [J]. Czechoslovak Math J，

2015，65(2)：427－433.

[4] 郭秀云，赵先鹤. Sylow子群的极大子群在局部子群中的π-拟正规性[J]. 数学物理学报，2008，28A(6)：1222－1226.

[5] 蹇 祥，吕 恒. 具有极大正规化子的有限群[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：56－60.

[6] 薛海波，吕 恒. 非交换子群具有极小中心化子的有限p-群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(8)：12－15.

[7] HUPPERT B. Endliche Gruppen *I* [M]. New York：Springer，1967.

[8] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. New York：Springer，1982.

[9] LI Y M，WANG Y，WEI H Q. Influence of π-Quasinormality of Some Subgroups of a Finite Group [J]. Arch Math，2003，81(3)：245－252.

[10] WANG Y M. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c-Supplemented [J]. J Algebra，2000，224(2)：467－478.

[11] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York：Harper & Row，1968.

[12] TATE J. Nilpotent Quotient Groups [J]. Topology，1964，3(3)：109－111.

On *SS*-Supplemented Subgroups of Finite Groups

CHANG Jian， LIU Jian-jun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A subgroup H of a group G is said to be SS-supplemented in G if there exists a subgroup K of G such that $G=HK$ and $H\cap K$ is S-quasinormal in K. In this paper，we show the following results：(i) Let p be the smallest prime dividing $|G|$ and SS-supplemented in $N_G(P)$ and P' is S-qusinormal in G，then G is p-nilpotent. (ii) Let $\mathscr{F}$ be a saturated formation containing the class of all supersolvable groups $\mathscr{U}$ and let H is normal in G such that $G/H\in\mathscr{F}$. Suppose that，for all primes p dividing $|H|$ and for all $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，every maximal subgroup of P is SS-supplemented in $N_G(P)$ and P' is S-quasinormal in G. Then $G\in\mathscr{F}$.

Key words：SS-supplemented subgroups；normalizer；maximal subgroups；saturated formations

责任编辑 廖 坤 崔玉洁