第 43 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 10 月
Vol. 43 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.003

$G_\chi I$ -内射模①

魏佳玲， 杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要: 利用 G_χ -内射模引入了一种新的模类 $G_\chi I$ -内射模. 如果对任意的 G_χ -内射模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M)=0$，称左 R -模M 是 $G_\chi I$ -内射模. 之后讨论了这类模的一些同调性质，并且探索了 G_χ -内射模、内射模与 $G_\chi I$ -内射模之间的关系. 而且利用 $G_\chi I$ -内射模给出了半单环的一个新刻画，每个左 R -模是强 $G_\chi I$ -内射的当且仅当每个 G_χ -内射左 R -模是投射的当且仅当 R 是半单环. 我们还讨论了模的 $G_\chi I$ -内射维数，给出了该维数的一些等价刻画.

关 键 词: G_χ -内射模; $G_\chi I$ -内射模; G_χ -内射维数; $G_\chi I$ -内射维数

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2018)10-0009-04

自 20 世纪 60 年代以来，相对同调代数特别是 Gorenstein 同调代数受到学者们的广泛关注. 文献[1]介绍了双边 Noether 环上有限生成模的 G-维数的概念. 文献[2]将文献[1]的想法进行了推广，在任意环上定义了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 投射模，并证明了：在 Noether 环上，有限生成 Gorenstein 投射模即为 G -维数为 0 的模. 文献[2]还得到了 Gorenstein 内射模和投射模类似于内射模和投射模的许多同调性质，然而，很多结果都需要 Gorenstein 环的假设. 直到 2004 年，文献[3]才在任意环上讨论了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 投射模及其维数. Gorenstein 内射模作为 Gorenstein 同调代数的重要一类，被许多专家学者广泛研究. 文献[4]给出了 GI -内射模的概念，得到了半单环的新刻画以及模和环的 GI -内射维数的同调性质. 文献[5]定义了余可解范畴 χ，进而引入了 GI -内射模的概念. 受以上工作的启发，本文用 G_χ -内射模定义了一个新的模类 $G_\chi I$ -内射模，证明了 $G_\chi I$ -内射模类关于扩张、直积和直和项封闭，并且探索了 G_χ -内射模、内射模与 $G_\chi I$ -内射模之间的关系，最后讨论了模的 $G_\chi I$ -内射维数，证明了每个左 R -模是强 $G_\chi I$ -内射的当且仅当每个 G_χ -内射左 R -模是投射的当且仅当 R 是半单环.

1 预备知识

本文中的环 R 指有单位元的结合环，R-Mod 表示左 R -模范畴，所有的模均指酉模. 我们用 $pd_R(M)$，$\mathrm{id}_R(M)$ 分别表示左 R -模 M 的投射、内射维数. 用 $l.D(R)$ 表示环 R 的左整体维数.

定义 1[5] 设 χ 是 R-Mod 的子范畴. 如果 χ 满足以下条件:

(a) χ 包含 R-Mod 中的所有内射对象;

(b) χ 关于扩张封闭;

(c) χ 关于单同态的余核封闭.

则称 χ 为余可解的.

不特别申明，文中的 χ 均指 R-Mod 的余可解子范畴.

---

① 收稿日期: 2018-04-01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11761060); 西北师范大学青年教师科研能力提升计划项目(自然科学类)(NWNU-LKQN-16-5, NWNU-LKQN-16-13).

作者简介: 魏佳玲(1992-),女,硕士研究生,主要从事同调代数的研究.

定义 2[5] 设 M 是左 R -模.

(a) 如果存在一个内射模的正合序列 $I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$，使得对任意 $X \in \chi$，$\mathrm{Hom}_R(X, I)$ 是正合的，则称 I 是一个完全 I_χ 复形.

(b) 如果存在一个完全 I_χ 复形 $I = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$，使得 $M = \mathrm{Coker}(I_1 \to I_0)$，则称 M 是 G_χ -内射模 . M 的 G_χ -内射维数记为 G_χ-$\mathrm{id}_R(M)$，被定义为

$\inf\{n > 0$：存在正合序列 $0 \to M \to G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_n \to 0$，其中每个 G_i 是 G_χ -内射的$\}$

若 χ 是内射模的类，则 $G_\chi I$ -内射模及维数即为 Gorenstein 内射模及维数.

定义 3[4] 如果对任意的 Gorenstein 内射模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$，则称左 R -模 M 是 GI -内射的. 左 R -模 M 的 GI -内射维数 GI-$\mathrm{id}_R(M)$ 被定义为对任意的 Gorenstein 内射左 R -模 N，使 $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \neq 0$ 的最大的正整数 n.

定义 4[6] 如果对任意的内射模 E，$\mathrm{Ext}_R^1(E, M) = 0$，则称左 R -模 M 是余纯内射的.

2 $G_\chi I$ -内射模

定义 5 如果对任意的 G_χ -内射模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$，则称左 R -模 M 是 $G_\chi I$ -内射模.

注 1 (a) $G_\chi I$ -内射模类关于扩张封闭;

(b) 因为{内射模} $\subseteq$ {G_χ -内射模} $\subseteq$ {Gorenstein 内射模}，所以{内射模} $\subseteq$ {GI -内射模} $\subseteq$ {$G_\chi I$ -内射模} $\subseteq$ {余纯内射模}.

命题 1 设 R 是环，则左 R -模 M 是内射的当且仅当 M 是 $G_\chi I$ -内射的且 G_χ - $\mathrm{id}_R(M) \leqslant 1$.

证 必要性 由{内射模} $\subseteq$ {$G_\chi I$ -内射模} 易知.

充分性 设 G_χ -$id_R(M) \leqslant 1$. 由文献[5]的定理 2.13 知，存在正合列 $0 \to M \to I \to L \to 0$，其中 I 是内射的，L 是 G_χ -内射的. 又因为 M 是 $G_\chi I$ -内射的，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(L, M) = 0$. 故序列 $0 \to M \to I \to L \to 0$ 可裂. 从而 M 是内射的.

命题 2 设 M 是左 R -模. 则 M 是 $G_\chi I$ -内射的当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ 作用于任意正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是正合的，其中 C 是 G_χ -内射的.

证 必要性 由定义易知.

充分性 对任意的 G_χ -内射模 C，存在短正合列 $0 \to K \to P \to C \to 0$，其中 P 是投射模. 则有正合列 $\mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(K, M) \to \mathrm{Ext}_R^1(C, M) \to 0$. 又由条件知，$\mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(K, M) \to 0$ 正合，所以 $\mathrm{Ext}_R^1(C, M) = 0$. 因此 M 是 $G_\chi I$ -内射的.

命题 3 设 R 是交换环. 则对任意 R -模 M，以下条件等价:

(i) M 是 $G_\chi I$ -内射模;

(ii) 对任意的投射 R -模 Q，$\mathrm{Hom}_R(Q, M)$ 是 $G_\chi I$ -内射的.

证 (i)⇒(ii) 设 M 是 $G_\chi I$ -内射模，A 是非空集合. 则 $\mathrm{Hom}_R(R^{(A)}, M) \cong M^A$. 由于 $G_\chi I$ -内射模关于直积封闭，所以 $\mathrm{Hom}_R(R^{(A)}, M)$ 是 $G_\chi I$ -内射的. 设 Q 是投射模，所以 Q 是 $R^{(I)}$ 的直和项，其中 I 是指标集. 故 $\mathrm{Hom}_R(Q, M)$ 是 $\mathrm{Hom}_R(R^{(I)}, M)$ 的直和项. 由注 1(a) 知，$\mathrm{Hom}_R(Q, M)$ 是 $G_\chi I$ -内射模.

(ii)⇒(i) 取 $Q = R$ 易得结论.

推论 1 设 R 是交换 Artin 环. 则左 R -模 M 是 $G_\chi I$ -内射的当且仅当对任意平坦模 F，$\mathrm{Hom}_R(F, M)$ 是 $G_\chi I$ -内射的.

证 注意到若 R 是交换 Artin 环，则左 R -模 M 是平坦的当且仅当 M 是投射的.

3 环和模的 $G_\chi I$ -内射维数

定义 6 设 R 是环. 左 R -模 M 的 $G_\chi I$ -内射维数 $G_\chi I$-$\mathrm{id}(M)$ 被定义为对任意的 $G_\chi I$ -内射左 R -模 N，使 $\mathrm{Ext}_R^n(N, M) \neq 0$ 的最大的正整数 n.

称环 R 的左整体 $G_\chi I$ -内射维数为 $l.G_\chi I$-$\dim(R) = \mathrm{Sup}\{G_\chi I$-$\mathrm{id}_R(M)$: M 是左 R -模$\}$. 类似地，可以定义 $r.G_\chi I$-$\dim(R)$. 当 R 是交换环时，记为 $G_\chi I$-$\dim(R)$.

注 2　设 R 是环．M 是左 R -模．则

$$GI\text{-}\mathrm{id}_R(M) \leqslant G_\chi I\text{-}\mathrm{id}_R(M) \leqslant \mathrm{id}_R(M)$$

而且

$$l.\,G_\chi I\text{-}\dim(R) \leqslant l.\,D(R)$$

若 M 是左 R -模且 $\mathrm{id}_R(M) < \infty$，则 $GI\text{-}\mathrm{id}_R(M) = G_\chi I\text{-}\mathrm{id}_R(M) = \mathrm{id}_R(M)$.

定义 7　如果对任意的 G_χ -内射左 R -模 N 及任意的 $i \geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0$，则称左 R -模 M 是强 $G_\chi I$ -内射的．

命题 4　设 R 是环．M 是左 R -模．则以下条件等价：

(i) $G_\chi I\text{-}\mathrm{id}_R(M) \leqslant n$；

(ii) 对任意的 G_χ -内射左 R -模和 $j \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^{n+j}(N, M) = 0$；

(iii) 对每个正合列 $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to C^n \to 0$，其中 $E^0, E^1, \cdots, E^{n-1}$ 内射，C^n 是强$G_\chi I$ -内射的．

证　(i)$\Leftrightarrow$(ii) 显然．

(ii)$\Rightarrow$(iii) 考虑正合列 $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to C^n \to 0$，其中 $E^0, E^1, \cdots, E^{n-1}$ 内射．设 $L^0 = M$，$L^i = \mathrm{Im}(E^{i-1} \to E^i)(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$L^n = C^n$．则有正合列

$$0 \to L^i \to E^i \to L^{i+1} \to 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

对任意的 G_χ -内射左 R -模 N 和 $j \geqslant 1$，由(ii) 知

$$\mathrm{Ext}_R^j(N, C^n) \cong \mathrm{Ext}_R^{j+1}(N, L^{n-1}) \cong \mathrm{Ext}_R^{j+2}(N, L^{n-2}) \cong \cdots \cong Ext_R^{j+n}(N, M) = 0$$

因此由定义知，C^n 是强 $G_\chi I$ -内射的．

(iii)$\Rightarrow$(ii) 设 $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots$ 是 M 的内射分解．令 $L^n = Co\ker(E^{n-2} \to E^{n-1})$．则有正合列

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^{n-1} \to L^n \to 0$$

由(iii) 知，L^n 是强 $G_\chi I$ -内射的．对任意的 G_χ -内射左 R -模 N 和 $j \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^{j+n}(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^j(N, L^n) = 0$.

命题 5　设 $l.\,G_\chi I\text{-}\dim(R) \leqslant n$．则对左 R -模 M，以下条件等价：

(i) M 是强 $G_\chi I$ -内射左 R -模；

(ii) 对任意的左 R -模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$；

(iii) 对任意的左 R -模 N 及任意的 $i \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0$.

证　(i)$\Rightarrow$(ii) 设 N 是左 R -模．则存在正合列 $0 \to N \to G_0 \to G_1 \to \cdots \to G_n \to 0$，其中 G_i 是 G_χ -内射的．设 $L_0 = N$，$L_i = \mathrm{Im}(G_{i-1} \to G_i)(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$L_n = C_n$．则有正合列

$$0 \to L_i \to G_i \to L_{i+1} \to 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

因此由(i) 知

$$\mathrm{Ext}_R^1(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^2(L_1, M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(L_2, M) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^{n+1}(G_n, M) = 0$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 N 是左 R -模．则 $G_\chi\text{-}\mathrm{id}_R(N) \leqslant n$．下面证明对 $i \geqslant 1$，$\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0$．对 i 进行归纳．$i = 1$ 时，显然成立．设 $i \geqslant 2$．取 N 的部分投射分解

$$0 \to K_{i-1} \to P_{i-2} \to \cdots \to P_0 \to N \to 0$$

由(ii) 知，$\mathrm{Ext}_R^i(N, M) \cong \mathrm{Ext}_R^1(K_{i-1}, M) = 0$.

(iii)$\Rightarrow$(i) 由(iii) 知，左 R -模 M 是内射的．而每个内射模是强 $G_\chi I$ -内射的．故 M 是 $G_\chi I$ -内射的．

下面定理用强 $G_\chi I$ -内射模刻画了半单环：

定理 1　对任意的环 R，以下条件等价：

(i) 每个左 R -模是强 $G_\chi I$ -内射的；

(ii) 每个 G_χ -内射左 R -模是投射的；

(iii) R 是半单环．

证　(iii)$\Rightarrow$(ii) 由文献[4] 的引理 2.12 易知．

(ii)$\Rightarrow$(i) 设 M 是左R -模，N 是G_χ -内射左R -模．由(ii) 知，N 是投射的．故 $\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0$．因此由定义知，$M$ 是强 $G_\chi I$ -内射的．

(i)⇒(iii) 设 M 是左 R -模. 由(i) 知，M 是强 $G_\chi I$ -内射的. 再由命题 5 知，对任意左 R -模 N，有 $\mathrm{Ext}_R^i(N, M) = 0$. 所以 N 是投射的. 由文献[4] 的引理 2.12 知，R 是半单环.

参考文献:

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [J]. Meoirs Amer Math Soc, 1969, 94: 1－10.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Math Z, 1995, 220: 611－633.

[3] HOLM H. Gorenstein Homological Dimensions [J]. J Pure Appl Algebra, 2004, 189: 167－193.

[4] GAO Z H. On GI-Injective Modules [J]. Comm Algebra, 2015, 40(10): 3841－3858.

[5] GAO Z H, XU L Y. Gorenstein Coresolving Categories [J]. Comm Algebra, 2016, 45(10): 4477－4491.

[6] ENOCHS E E, JENDA O M G. Copure Injective Modules [J]. Quaest Math, 1993, 14: 401－409.

$G_\chi I$-Injective Module

WEI Jia-ling, YANG Xiao-yan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, G_χ-injective module is firstly used to introduce a new type of $G_\chi I$-injective module, a left R-module M is $G_\chi I$-injective module, if $\mathrm{Ext}_R^1(N, M) = 0$ for any G_χ-injective left R-module . Then some homological properties of these modules are given. Furthermore, the relationship between G_χ-injective module, injective module and is explored. And a new characterization of semi-simple ring is proved, each left R-module is strong G_χ-injective module if and only if every G_χ-injective module is projective, if and only if R is a semi simple ring . At last, we also discuss the dimension of $G_\chi I$-injective module and give some equivalent descriptions of this dimension.

Key words: G_χ-injective module; $G_\chi I$-injective module; G_χ-injective dimension; $G_\chi I$-injective dimension

责任编辑 廖 坤 崔玉洁