第 43 卷 第 10 期 西南师范大学学报（自然科学版） 2018 年 10 月
Vol. 43 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2018

DOI：10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.004

一类格子区组设计的存在性[①]

王成敏[1]， 单金炘[2]， 严 洁[2]

1. 泰州学院 数理学院，江苏 泰州 225300. 2. 江南大学 理学院，江苏 无锡 214122

摘要：一个 λ 重 $K_r \times K_c$ 格子区组设计是一个二元组 $(X, \mathcal{A})$，其中 X 为完全图 K_v 的顶点集，$\mathcal{A}$ 为 K_v 的一簇同构于 $K_r \times K_c$ 的子图，使得 $\mathcal{A}$ 中子图的边集形成 K_v 边集的 λ 次划分. 人们常使用基因分组测试方法对基因库进行筛选，而 $K_r \times K_c$ 格子区组设计在基因分组测试中有着重要应用. 运用直接构造与递归构造方法，完全解决了一类 2 重 $K_2 \times K_6$ 格子区组设计的存在性.

关 键 词：基因分组测试；格子区组设计；图；存在性

中图分类号：O157.2 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2018)10-0013-05

本文中，用 K_v 表示一个有 v 个顶点的完全图. 设 R 和 C 分别为完全图 K_r 和 K_c 的顶点集. 两个图 K_r 和 K_c 的卡氏积表示一个图，记为 $K_r \times K_c$，满足：(i) 顶点集为 $R \times C$；(ii) 任意两个不同的顶点 (a_1, b_1) 和 (a_2, b_2) 相邻当且仅当 $a_1 = a_2$ 或者 $b_1 = b_2$. 用设计理论的语言，图 $K_r \times K_c$ 也称作 $K_r \times K_c$ 格子区组[1-2]. 这里涉及到的图论术语可参见文献[3]等.

设 $\mathcal{A}$ 为图 H 的一簇子图. 如果对于图 H 的每一条边 $e \in E(H)$，e 恰恰出现在 $\mathcal{A}$ 的 λ 个元素中，则称子图簇 $\mathcal{A}$ 为图 H 的一个 λ 重分解. 进一步，如果 $\mathcal{A}$ 中的每一个子图都同构于图 G，则称 $\mathcal{A}$ 为图 H 的一个 λ 重 G-分解. 如果图 $H = K_v$ 且 $G = K_r \times K_c$，则该分解也称为一个 λ 重 $K_r \times K_c$-设计或一个 λ 重 $K_r \times K_c$ 格子区组设计，记作一个阶为 v 的 $(K_r \times K_c, \lambda)$-$GD$.

当 $r = c$ 时，1 重 $K_r \times K_c$ 格子区组设计也称作方格区组设计，最早由文献[4]进行了研究. 而格子区组设计作为方格区组设计的推广，由文献[5]最早引入. 文献[6]讨论了格子区组设计在基因分组测试中的重要应用. 从那以后，格子区组设计的存在性以及相关问题引起了诸多学者的研究兴趣[1-2,5-12]. 当 $(r, c) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 5), (2, 6)\}$ 时，$GD(v; K_r \times K_c, 1)$ 的存在性已经确立[1-2,8-9,13]. 当 $(r, c) \in \{(2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ 时，文献[10]完全确立了对于任意的 $\lambda \geqslant 2$，一个阶为 v 的 $(K_r \times K_c, \lambda)$-$GD$ 的存在性. 但是随着 r 和 c 的增大，阶为 v 的 $(K_r \times K_c, \lambda)$-$GD$ 的存在性问题也变得更加困难. 本文将进一步研究格子区组设计的存在性.

作为文献[10]的延续，本文主要考虑阶为 v 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD 的存在性，即 2 重 $K_2 \times K_6$-设计的存在性. 下面的引理给出了阶为 v 的 $(K_r \times K_c, \lambda)$-$GD$ 存在的显然的必要条件.

引理 1 如果一个 $GD(v; K_r \times K_c, \lambda)$ 存在，则必有 $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{r+c-2}$ 且 $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{rc(r+c-2)}$.

当 $r = 2$，$c = 6$ 且 $\lambda = 1$ 时，文献[9]证明了这个必要条件也是充分的.

定理 1[9] 一个阶为 v 的 $(K_2 \times K_6, 1)$-GD 存在的充分必要条件是 $v \equiv 1 \pmod{72}$.

---

① 收稿日期：2016-11-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11471144)；江苏省自然科学基金项目(BK20171318).

作者简介：王成敏(1979-)，男，教授，主要从事组合设计理论及应用的研究.

单金炘 (1989-)，男，硕士研究生，主要从事组合设计理论及应用的研究.

根据引理 1，当 $r=2$，$c=6$ 且 $\lambda=2$ 时，我们有：

引理 2 若一个阶为 v 的$(K_2\times K_6, 2)$-GD 存在，则有 $v\equiv 1\pmod{36}$.

本文将给出一类 2 重 $K_2\times K_6$ 格子区组设计的存在性. 下面给出$(K_r\times K_c, \lambda)$-$GGDD$ 的定义，其是研究格子区组设计存在性的一类重要辅助设计.

若图 H 的顶点集 X 可以划分成 u 个非空子集 $G_1, G_2, \cdots, G_u$(称为组或部)，使得顶点 $v_i\in G_i$ 和 $v_j\in G_j$ 在 H 中相邻当且仅当 $i\neq j$，则称图 H 为完全 u 部图. 若 $|G_i|=g_i(1\leqslant i\leqslant u)$，则记该完全 u 部图为 $K_{g_1,g_2,\cdots,g_u}$. $K_{g_1,g_2,\cdots,g_u}$ 的一个 λ 重 $K_r\times K_c$ 分解称为型为 $T=\{g_1, g_2, \cdots, g_u\}$ 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-格子区组可分组设计，记作$(K_r\times K_c, \lambda)$-$GGDD$. 通常我们使用指数记号来表示$(K_r\times K_c, \lambda)$-$GGDD$ 的型 T：型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_s^{u_s}$ 的表示有 u_i 个大小为 g_i 的组，$1\leqslant i\leqslant s$. 显然，型为 1^v 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-$GGDD$ 就是 $GD(v; K_r\times K_c, \lambda)$.

文献[9]建立了许多$(K_2\times K_6, 1)$-$GGDD$ 的存在性，这些将在证明 $GD(v; K_2\times K_6, 2)$ 存在性时发挥重要作用.

引理 3[9] 对于每一对$(g, u)\in\{(2, 19), (2, 37), (3, 17), (3, 25), (3, 41), (4, 10), (6, 7), (6, 11), (6, 12), (6, 13), (6, 23), (6, 31), (6, 47)\ (9, 9), (12, 6), (12, 7)\}$，存在一个型为 g^u 的$(2\times 6, 1)$-$GGDD$.

1 预备知识

下面给出设计理论中的一些基本概念，并列出一些相关的已知结果，以供后面使用. 这里使用文献[14]作为标准的参考文献.

若 K 是正整数集合，可分组设计(K-GDD)是满足如下性质的三元集$(X, \mathscr{G}, \mathscr{A})$：(i) X 是一个有限点集；(ii) $\mathscr{G}$ 是 X 的一个划分(称为组)；(iii) $\mathscr{A}$ 是 X 的一簇大小取自于集合 K 的子集(称为区组)，满足 X 中的任意不在同一组上的点对恰恰出现在一个区组中.

GDD 的型是指多元集合$\{|G|: G\in\mathscr{G}\}$. 通常使用“指数”记号来表示 GDD 的型. 一个型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_s^{u_s}$ 的 GDD 表示该 GDD 包含 u_i 个大小为 g_i 的组$(1\leqslant i\leqslant s)$. 当 $K=\{k\}$ 时，简记 K-GDD 为 k-GDD.

一个型为 n^k 的 k-GDD 称为横截设计，记作 $TD(k, n)$. 一个型为 1^v 的 K-GDD 称为成对平衡设计，记作$(v, K, 1)$-PBD. 进一步地，$(v, \{k\}, 1)$-PBD 就是著名的平衡不完全区组设计，记作$(v, k, 1)$-$BIBD$.

下面已知结果均来自于文献[14]，其在后面的定理证明中有着重要作用.

定理 2[14] 对于所有的正整数 $\lambda\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 2$，存在一个 $TD_\lambda(6, n)$.

定理 3[14] 设 $E=[10-30]\cup[32-41]\cup\{45, 46, 47\}\cup[93-95]\cup[98-101]\cup[137-139]\cup[142-150]\cup[152-155]\cup\{160, 161, 166, 167, 185\}$. 则对于每一个正整数 $v\notin E$，存在一个$(v, \{6, 7, 8, 9\}, 1)$-PBD.

定理 4[14] 存在一个型为 6^8 的 7-GDD 和一个型为 3^{15} 的 7-GDD.

定理 5[14] 存在一个$(175, 7, 1)$-$BIBD$.

2 构造方法

下面我们给出一些递归构造，它们都是设计理论中标准递归方法的变形，它们的证明类似于文献[2,9-10]中的构造方法.

构造 1 设 a 为正整数. 如果一个阶为 v 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-GD 存在，则一个阶为 v 的$(K_r\times K_c, a\lambda)$-$GD$ 也存在.

构造 2 如果一个型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_t^{u_t}$ 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-$GGDD$ 存在，且对每一个 $1\leqslant i\leqslant t$，一个阶为 g_i+1 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-GD 存在，则一个阶为 $\sum\limits_{i=1}^{t}g_iu_i+1$ 的$(K_r\times K_c, \lambda)$-GD 存在.

构造 3 如果一个型为 $g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_t^{u_t}$ 的 K-GDD 存在，且对每一个 $k\in K$，存在一个型为 m^k 的$(K_r\times K_c,$

λ)-$GGDD$，则存在一个型为$(mg_1)^{u_1}(mg_2)^{u_2}\cdots(mg_t)^{u_t}$的$(K_r\times K_c,\lambda)$-$GGDD$.

推论 1　如果存在一个$(v,K,1)$-PBD，且对每一个$k\in K$，存在一个型为m^k的$(K_r\times K_c,\lambda)$-$GGDD$，则存在一个型为m^v的$(K_r\times K_c,\lambda)$-$GGDD$.

构造 4　如果存在一个型为$g_1^{u_1}g_2^{u_2}\cdots g_t^{u_t}$的$(K_r\times K_c,\lambda)$-$GGDD$和一个$TD_\mu(k,m)$，这里$k=\max\{r,c\}$，则一个型为$(mg_1)^{u_1}(mg_2)^{u_2}\cdots(mg_t)^{u_t}$的$(K_r\times K_c,\lambda\mu)$-$GGDD$存在.

3　主要结论

这一部分我们将证明我们的主要结论，即完全解决一类 2 重$K_2\times K_6$格子区组设计的存在性.

引理 4　若偶数$n\geqslant 2$，则存在一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,2)$-GD.

证　根据定理 1，若$n\geqslant 2$为偶数，一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,1)$-GD存在．应用构造 1，取$\lambda=1$和$a=2$，可得一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,2)$-GD.

根据引理 4，为了解决 2 重$K_2\times K_6$格子区组设计的存在性，我们只需要考虑$n\geqslant 1$为奇数时，一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,2)$-GD的存在性.

引理 5　对每一个$n\in\{1,3,5\}$，存在一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,2)$-GD.

证　对于$n=1$，在点集$X=Z_{37}$上构造一个阶为 37 的$(K_2\times K_6,2)$-GD．简单计算不难得知该设计应该包含 37 个格子区组．我们取格子基区组为$\{0,1,2,4,8,17;6,11,19,22,34,29\}$．该基区组在群$Z_{37}$的作用下得到所有格子区组.

对于$n=3$，取点集为$X=Z_{109}$，简单计算不难得知该设计包含3×109个格子区组．取格子基区组为$\{0,1,2,4,7,15;4,28,37,81,65,102\}$．对于每一个$i\in Z_3$，用$63^i$乘以区组中的每一个元素，共得到 3 个格子区组，这里的运算在 mod 109 意义下进行．以上所得的 3 个格子区组在群Z_{109}的作用下得到所有的格子区组.

对于$n=5$，取点集为$X=Z_{181}$，简单计算不难得知该设计包含5×181个格子区组．取格子基区组为$\{0,1,2,4,9,19;5,12,107,141,33,69\}$．对于每一个$i\in Z_5$，用$59^i$乘以区组中的每一个元素，共得到 5 个格子区组，这里的运算在 mod 181 意义下进行．以上所得的 5 个格子区组在群Z_{181}的作用下得到所有格子区组.

引理 6　设正整数n满足$6\leqslant n\leqslant 10$，则存在一个型为36^n的$(K_2\times K_6,2)$-$GGDD$.

证　当$n=6$时，一个型为12^6的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$和一个$TD_2(6,3)$分别由引理 3 和定理 2 给出，应用构造 4 可得一个型为36^6的$(K_2\times K_6,2)$-$GGDD$.

当$n=8$时，一个型为6^8的 7-GDD由定理 4 给出，而一个型为6^7的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$由引理 3 给出．应用构造 3，可得一个型为36^8的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$，从而一个型为36^8的$(K_2\times K_6,2)$-$GGDD$也存在.

下面考虑$n\in\{7,9,10\}$．对于每一组$(g,n)\in\{(6,7),(9,9),(4,10)\}$，根据引理 3，存在一个型为$g^n$的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$．又根据定理 3，对每一个$g\in\{6,9,4\}$，一个$TD_2\left(6,\frac{36}{g}\right)$均存在．应用构造 4，可得一个型为$36^n$的$(K_2\times K_6,2)$-$GGDD$.

引理 7　设奇整数n满足$1\leqslant n\leqslant 41$，则存在一个阶为$36n+1$的$(K_2\times K_6,2)$-GD.

证　如果奇数$n\leqslant 5$，应用引理 5．如果$n\geqslant 7$且$n\notin\{15,29\}$，我们选取适当的正整数g,u,m和t满足以下 4 个条件：

(i)$36n=mgu$；

(ii)$mg=36t$且$1\leqslant t\leqslant 5$；

(iii) 一个$TD_2(6,m)$存在；

(iv) 一个型为g^u的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$存在.

我们从一个型为g^u的$(K_2\times K_6,1)$-$GGDD$出发，应用构造 4，以一个$TD_2(6,m)$作为输入设计，可得一个型为$(mg)^u$的$(K_2\times K_6,2)$-$GGDD$．又因为$mg=36t$且$1\leqslant t\leqslant 5$，根据引理 5，存在一个阶为$mg+1$的

$(K_2 \times K_6, 2)$-GD. 应用构造2，可得一个阶为 $mgu+1=36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

对于给定的 n，在表1中，我们给出参数 g, u, m 和 t 的合适取值满足如上叙述条件，从而根据以上推导，可得一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

表1　引理7中的参数选择

n	(g, u)	m	t	n	(g, u)	m	t
7	(6, 7)	6	1	25	(3, 25)	12	1
9	(9, 9)	4	1	27	(9, 9)	12	3
11	(6, 11)	6	1	31	(6, 31)	6	1
13	(6, 13)	6	1	33	(6, 11)	18	3
17	(3, 17)	12	1	35	(6, 7)	30	5
19	(2, 19)	18	1	37	(2, 37)	18	1
21	(6, 7)	18	3	39	(6, 13)	18	3
23	(6, 23)	6	1	41	(3, 41)	12	1

当 $n=15$ 时，根据定理4，一个型为 3^{15} 的7-GDD 存在. 另外，一个型为 12^7 的 $(K_2 \times K_6, 1)$-$GGDD$ 由引理3给出. 应用构造3和构造1可得一个阶为 $36 \times 15+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

当 $n=29$ 时，根据定理5，一个 $(6 \times 29+1, 7, 1)$-$BIBD$ 存在. 删去一个点，且取所有删去点所在的区组作为组得到一个型为 6^{29} 的7-GDD. 另外，一个型为 6^7 的 $(K_2 \times K_6, 1)$-$GGDD$ 由引理3给出. 应用构造3和构造1可得一个阶为 $36 \times 29+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

引理8　若奇整数 n 满足 $43 \leqslant n \leqslant 185$，则存在一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

证　设正整数 m 和 k 满足 $8 \leqslant k \leqslant 13$ 且 $7 \leqslant m \leqslant 16$. 假设一个 $TD_1(k, m)$ 存在. 对于该 TD，删去 $k-6$ 个组中若干个点，剩余点数依次为 $x_7, x_8, \cdots, x_k$，这里 $0 \leqslant x_i \leqslant m (7 \leqslant i \leqslant k)$. 这样得到一个型为 $m^6 x_7^1 x_8^1 \cdots x_k^1$ 的 $\{6, 7, \cdots, k\}$-GDD. 应用构造3可得一个型为 $(36m)^6 (36x_7)^1 (36x_8)^1 \cdots (36x_k)^1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-$GGDD$.

根据假设 $7 \leqslant m \leqslant 16$. 由引理4和引理7，一个阶为 $36m+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD 存在. 应用构造2，可得一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD，这里 $n=6m+\sum_{i=7}^{k} x_i$. 在下面的表2中，我们列出合适的 k 和 m 使得 $TD_1(k, m)$ 存在，并给出了给定的 k 和 m，使得一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD 存在的 n 的范围.

表2　引理8中的参数选择

m	7	8	11	16	19
k	8	9	10	10	10
$n=6m+\sum_{i=7}^{k} x_i$	[42, 56]	[56, 72]	[66, 110]	[96, 160]	[114, 190]

定理6　对于任意正整数 $n \geqslant 1$，存在一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

证　当 $n \leqslant 185$ 时，一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD 由引理4、引理7和引理8给出. 下面考虑 $n \geqslant 186$. 根据定理3，一个 $(n, \{6, 7, 8, 9\}, 1)$-PBD 存在. 应用推论1，以一个型为 36^k 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-$GGDD$ 作为输入设计 $(k \in \{6, 7, 8, 9\})$，得到一个型为 36^n 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-$GGDD$. 再由于一个阶为37的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD 存在，应用构造1可得一个阶为 $36n+1$ 的 $(K_2 \times K_6, 2)$-GD.

参考文献:

[1] LI Y, YIN J X, ZHANG R C, et al. The Decomposition of K_v into $K_2 \times K_5$'s [J]. Sci China (Ser A), 2007, 50(10): 1382-1388.

[2] ZHANG R, GE G, LING A C H, et al. The Existence of $r \times 4$ Grid-Block Designs with $r=3,4$ [J]. SIAM J Discrete Math, 2009, 23(2): 1045-1062.

[3] WEST D B. Introduction to Graph Theory [M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.

[4] YATES F. Lattice Squares [J]. J Agri Sci, 1940, 30(4): 672-687.

[5] FU H L, HWANG F K, JIMBO M, et al. Decomposing Complete Graphs into $K_r \times K_c$'s [J]. J Statist Plann Inference, 2004, 119(2): 225－236.
[6] HWANG F K. An Isomorphic Factorization of the Complete Graph [J]. J Graph Theory, 2010, 19(3): 333－337.
[7] MUTOH Y, JIMBO M, FU H L. A Resolvable $r \times c$ Grid-Block Packing and Its Application to DNA Library Screening [J]. Taiwan J Math, 2004, 8(4): 713－737.
[8] MUTOH Y, MORIHARA T, JIMBO M, et al. The Existence of 2×4 Grid-Block Designs and Their Applications [J]. SIAM J Discrete Math, 2003, 16: 173－178.
[9] WANG C M, COLBOURN C J. The Existence of $K_2 \times K_6$-Designs [J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29(5): 1557－1567.
[10] YAN J. The Existence of $(2 \times c, \lambda)$ Grid-Block Designs with $c \in \{3, 4, 5\}$ and $\lambda \geqslant 1$ [J]. Aequat Math, 2013, 85(1/2): 17－33.
[11] 江世明，李敬文，江红豆. 图的点可区别边染色猜想的算法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：47－54.
[12] 唐保祥，任　韩. 3 类图的优美标号 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：20－24.
[13] CARTER J E. Designs on Cubic Multigraphs [M]. Canada: Mathematics, 1989.
[14] COLBOURN C J, DINITZ J H. The CRC Hankbook of Combinatorial Designs [M]. Boca Raton: CRC Press, 2007.

On Existence of a Class of Grid-block Designs

WANG Cheng-min[1], SHAN Jin-xin[2], YAN Jie[2]

1. School of Science, Taizhou University, Taizhou Jiangsu 225300, China;
2. School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: One λ-fold $K_r \times K_c$ grid-block design is a pair (X, A) where X is the point set of K_v and A is a set of sub-graphs isomorphic to $K_r \times K_c$, such that the edge set of the sub-graphs forms λ-fold partitions of the edge set of K_v. People usually use gene group testing to do the DNA library screening and $K_r \times K_c$ grid-block designs play an important role in the applications to gene group testing. In this paper, direct and recursive constructions are utilized to completely solve the existence of one class of 2-fold $K_2 \times K_6$ grid-block designs.

Key words: gene group testing; grid-block design; graph; existence

责任编辑　廖　坤　崔玉洁