第 43 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 10 月
Vol. 43 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.005

基于特征方程的某些图双概率可靠性的统一形式①

刘 莹[1], 唐晓清[2], 王双成[3]

1. 邵阳学院 理学与信息科学系,湖南 邵阳 422000;
2. 上海立信会计金融学院 统计与数学学院,上海 201620;
3. 上海立信会计金融学院 信息管理学院,上海 201620

摘要:设灾难发生时,图 $G=(V, E)$的各顶点以独立概率 p_1 幸存,失效的顶点灾后以概率 p_2 独立恢复功能($p_1>p_2$).定义了双概率可靠性,利用减缩边递推公式得到路图、正则 q-树和圈图的迭代式满足二阶特征方程,并利用它们各自的初值,计算得到它们的统一形式的通项表达式.

关 键 词:双概率可靠性;特征方程;正则 q-树;减缩边公式

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2018)10-0018-04

近期,文献[1]提出了新的双变量色多项式概念.

设在一个没有环和复边的简单图 $G=(V, E)$ 里,V 是顶点集,E 是边集.令色的集合 $X=Y\cup Z$,$Y\cap Z=\varnothing$,并且设 $|X|=x$,$|Y|=y$.这样,对于图 G 的恰当染色,存在映射 φ:$V\longrightarrow X$,对于 V 中任意不同顶点 u,v,边$(uv)\in E$,并且对 $\varphi(u)\in Y$,$\varphi(v)\in Y$,有 $\varphi(u)\neq\varphi(v)$,也就是说,相邻的顶点不能染集合 Y 中的同一色.即相邻的顶点染同色,只有当这个色取自集合 Z.把染集合 Y 中色称为“恰当染色”,而把染集合 Z 中色称为“不恰当染色”,由此得到图 G 的不同的染色数记为 $P(G; x, y)$.

文献[1]提出了如下双变量色多项式计算公式:

$$P(G;\ x,\ y)=\sum_{X\subseteq V}(x-y)^{|X|}P(G-X;\ y) \tag{1}$$

众所周知,减缩边公式对于色多项式[2-3]的简化计算是非常重要的.对于(1)式,我们推导了其减缩边公式[4-5].其后的研究,利用图的顶点,或者边的幸存概率[6-7],人们研究了图的各种可靠性,比如根树的边数期望值[8]、双概率可靠性[9]、正则 q-树可靠性[10].文献[11]设顶点总是不失效,而每条边在灾难发生时,独立以概率 p 幸存,则灾后与根正常连通的子图的顶点数是一个随机变量,研究了根图的可靠性.文献[12]研究了顶点以概率 p 幸存时候的边数可靠性.之后,文献[13-14]继续研究了根图的稳定性问题.一直以来,上述的种种可靠性表达式[15]没有一种统一的形式.所以,寻找一个统一的表达形式就是一个重要的问题.

1 预备知识

定义 1 对于根图 G,设每个顶点的幸存概率是 p_1($0\leqslant p_1\leqslant 1$),且彼此的是否幸存是独立的.在灾难

① 收稿日期:2017-11-28
基金项目:国家社会科学基金项目(18BTJ020);湖南省教育厅一般项目(16C1434);邵阳市科技计划项目(2017GX09);立信学院校级2017 教学研究项目(AW-12-2203-005066);2017 立信学院“经济统计学应用型本科试点”项目(A0-11-2806-09-0112);2018 立信产学研示范基地建设项目(A0-21-0251-00409).
作者简介:刘 莹(1980-),女,讲师,主要从事图论和经济模型的研究.
通信作者:唐晓清,博士,讲师.

发生以后，失效顶点的重新恢复功能的概率是 $p_2(0 \leqslant p_2 < p_1 \leqslant 1)$，那么，灾难后根图 G 还正常运行的期望值是

$$\Pr(G;\ p_1,\ p_2) = \left| \sum_{X \subset V} (p_1 - p_2)^{|X|} \cdot P(G - X;\ p_2) \right| \tag{2}$$

注 1　$P(G, \lambda)$ 是图 G 顶点的染色多项式. 空图表示为 $\varnothing$，令 $P(\varnothing;\ \lambda) = 1$，$|X|$ 表示集合 X 的阶.

根据定义 1，可以算出任何图的期望值，而期望值可以作为图的可靠性的指标，并且这个期望值是 p_1，p_2 的多项式. 当然，这个计算过程一般是比较复杂的，所以推导出它的减缩边公式就很重要，它的减缩边公式为：

引理 1　对于简单根图 $G = (V, E)$，其期望值有

$$\Pr(G;\ p_1,\ p_2) = \Pr(G_{-e};\ p_1,\ p_2) - \Pr(G_{/e};\ p_1,\ p_2) + (p_1 - p_2) \cdot \Pr(G - \{u,\ v\};\ p_1,\ p_2) \tag{3}$$

其中，顶点 $u \in V$，$v \in V$，而且边 $(uv) = e \in E$.

证　其证明完全类似文献[5]中相关结论的证明.

2　主要结果

2.1　路图的期望值

对有 n 个顶点的路图(表示为 P_n)的双变量色多项式的公式

$$P(P_n,\ x,\ y) = xP(P_{n-1};\ x,\ y) + \sum_{i=1}^{n-1} y(-1)^i P(P_{n-1-i};\ x,\ y)$$

根据定义 1 和引理 1，路图的可靠性有迭代公式

$$\Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) = (p_1 - 1) \cdot \Pr(P_{n-1};\ p_1,\ p_2) + (p_1 - p_2) \cdot \Pr(P_{n-2};\ p_1,\ p_2) \tag{4}$$

(4) 式类似于常微分方程

$$y'' - (p_1 - 1)y' - (p_1 - p_2)y = 0$$

并且 $\Delta = (p_1 - 1)^2 + 4(p_1 - p_2) = (p_1 + 1)^2 - 4p_2 > 0$. 故而，(4) 式应有通项表达式

$$\Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) = c_1 * r_1^n + c_2 * r_2^n \tag{5}$$

由 $\Delta > 0$，可以计算得

$$r_{1,2} = \frac{(p_1 - 1) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{6}$$

再由初值 $\Pr(\varphi;\ p_1,\ p_2) = 1$，$\Pr(P_1;\ p_1,\ p_2) = p_1$，容易算得系数分别为：

$$c_1 = \frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} + (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}} \qquad c_2 = \frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} - (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}} \tag{7}$$

从而得到路图的可靠性统一表达式为

$$\begin{aligned} \Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) = &\frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} + (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}} \cdot \left(\frac{p_1 - 1 + \sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}{2} \right)^n + \\ &\frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} - (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}} \cdot \left(\frac{p_1 - 1 - \sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}{2} \right)^n \end{aligned} \tag{8}$$

2.2　正则 q-树的期望值

定义 2　如果简单图 $G = (V, E)$ 是由一个团 K_q 的各个顶点和另外的 $n - q$ 个互不相邻的顶点相连接而成的 q-树，称之为正则 q-树，记为 T_q^n.

定理 1　有 $n(n \geq q + 2)$ 个顶点的正则 q-树的双概率期望值迭代公式是

$$\Pr(T_q^n;\ p_1,\ p_2) = (p_1 - q)\Pr(T_q^{n-1};\ p_1,\ p_2) + q(p_1 - p_2)\Pr(T_q^{n-2};\ p_1,\ p_2) \tag{9}$$

证　从团 K_q 外任选一顶点，然后对于这点所连团 K_q 每一个顶点的边反复运用减缩边公式(3)即得.

(9) 式类似于常微分方程

$$y'' - (p_1 - q)y' - q(p_1 - p_2)y = 0$$

并且

$$\Delta = (p_1 - \mathrm{q})^2 + 4q(p_1 - p_2) > 0$$

可以计算得

$$r_{1,2} = \frac{(p_1 - q) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \tag{10}$$

再根据具体的 q 的值，结合初值，就可以算得具体的系数值. 比如，当 $q = 2$ 时，初值为：

$$\Pr(T_2^2;\ p_1,\ p_2) = p_1^2 - p_2$$

$$\Pr(T_2^3;\ p_1,\ p_2) = p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_2$$

$$c_1 = \frac{2[(p_1^2 - p_2)\Delta + (p_1^3 + 2p_1^2 - 5p_1p_2 + 2p_2)\sqrt{\Delta}]}{\Delta[(p_1 - q) + \sqrt{\Delta}]^2}$$

$$c_2 = \frac{2[(p_1^2 - p_2)\Delta - (p_1^3 + 2p_1^2 - 5p_1p_2 + 2p_2)\sqrt{\Delta}]}{\Delta[(p_1 - q) - \sqrt{\Delta}]^2}$$

从而得到正则 2 -树的可靠性统一表达式为

$$\Pr(T_2^n;\ p_1,\ p_2) = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n \tag{11}$$

2.3 圈图的期望值

有 n 个顶点的圈图(表示为 C_n) 的双变量色多项式为

$$P(C_n;\ x,\ y) =$$

$$(x - y)P(P_{n-1};\ x,\ y) + y\left[\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}iP(P_{n-i};\ x,\ y) + (-1)^{n+1}(n-1)P(\varnothing;\ x,\ y)\right] \tag{12}$$

利用(2) 式和(3) 式，容易得到圈图的期望值迭代式为

$$\Pr(C_n;\ p_1,\ p_2) = \Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) - \Pr(C_{n-1};\ p_1,\ p_2) + (p_1 - p_2) \cdot \Pr(P_{n-2};\ p_1,\ p_2)$$

即

$$\Pr(C_n;\ p_1,\ p_2) + \Pr(C_{n-1};\ p_1,\ p_2) = \Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) + (p_1 - p_2) \cdot \Pr(P_{n-2};\ p_1,\ p_2)$$

而

$$\Pr(P_n;\ p_1,\ p_2) + (p_1 - p_2) \cdot \Pr(P_{n-2};\ p_1,\ p_2) = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot s^n \tag{13}$$

利用路图初值，容易算得：

$$r = \frac{(p_1 - 1) - \sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}{2} \qquad c_1 = \frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} - (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}\left(1 + \frac{p_1 - p_2}{r^2}\right)$$

$$s = \frac{(p_1 - 1) + \sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}{2} \qquad c_2 = \frac{\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2} + (p_1 + 1)}{2\sqrt{(p_1 + 1)^2 - 4p_2}}\left(1 + \frac{p_1 - p_2}{s^2}\right)$$

再代入圈图初值 $\Pr(C_3;\ p_1,\ p_2) = p_1^3 - 3p_1p_2 + 2p_2$，有通项表达式为

$$\Pr(C_n;\ p_1,\ p_2) = c_1 \cdot \frac{r^{n+1} + (-1)^n r^4}{r + 1} + c_2 \cdot \frac{s^{n+1} + (-1)^n s^4}{s + 1} + (-1)^{n-1}\Pr(C_3;\ p_1,\ p_2) \tag{14}$$

3 结　论

本文用统一的形式表示 3 种特殊图，即路图、正则 q -树和圈图的通项表达式，这是一个有趣的工作. 其他的一些特殊图，比如完全图、二部图等，由于不能化成二阶特征方程的形式，故而不能用统一的形式表示出来.

参考文献：

[1] DOHMEN K，PÖNITZ A，TITTMANN P. A New Two-Variable Generalization of the Chromatic Polynomial [J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science，2003(6)：69－89.

[2] 刘　莹，唐晓清. 图的双变量色多项式比较研究 [J]. 湖南师范大学自然科学学报，2014，37(6)：67－72.

[3] 唐晓清. 图的新双变量色多项式理论与应用 [D]. 上海：上海大学，2013.

[4] 唐晓清，刘念祖，王汉兴，等. 图的一类新双变量色多项式 [J]. 兰州大学学报：自然科学版，2012，48(2)：106－112.

[5] 唐晓清，刘念祖，王汉兴，等. 正则树的双变量色多项式研究 [J]. 应用数学学报，2013，36(4)：761－768.
[6] TANG X. A Matlab Toolbox for Grey Clustering Probability Model of Postgraduate's Innovative Ability [J]. Mechanics Materials Science & Engineering，2016(3)：193－203.
[7] 唐晓清，白延琴，刘念祖，等. 基于随机矩阵理论的 Markowitz 组合投资模型 [J]. 上海大学学报(自然科学版)，2013，19(3)：293－297.
[8] AIVALIOTIS M，GORDON G，GRAVEMAN W. When Bad Things Happen to Good Trees [J]. Graph Theory，2001，37：79－99.
[9] 刘念祖，唐晓清，王汉兴. 正则 q-树根图的双概率可靠性研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(12)：24－26.
[10] 刘　莹，唐晓清. 正则 q-树根图的可靠性研究 [J]. 东北师大学报(自然科学版)，2015，47(1)：17－21.
[11] BAILEY A，GORDON G，PATTON M. Expected Value Expansions in Rooted Graphs [J]. Discrete Appl Math，2003，128(2)：555－571.
[12] TANG X Q. New Expected Value Expansions of Rooted Graphs [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series)，2015，31(1)：81－88.
[13] 王冰杰，唐晓清. 根图的稳定性及其优化 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(4)：14－19.
[14] 唐晓清，刘　莹，刘念祖. 含根网络的可靠性与稳定性研究 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2017，34(5)：65－71.
[15] 许鹏飞，潘东波，杨　阳，等. 基于 D-S 证据理论的不对称表决系统可靠性研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：193－199.

Uniform Form of Some Graphs' Two Probability Reliability Based on Characteristic Equation

LIU　Ying[1]，　TANG Xiao-qing[2]，　WANG Shuang-cheng[3]

1. *Department of Science & Information Science，Shaoyang University，Shaoyang Hunan 422000，China*；
2. *College of Statistics & Mathematics，Shanghai Lixin University of Accounting and Finance，Shanghai 201620，China*；
3. *School of Information Management，Shanghai Lixin University of Accounting and Finance，Shanghai 201620，China*

Abstract：Suppose $G=(V,E)$ is a graph where each vertex may independently succeed with probability p_1 when catastrophic thing happens，and each failure vertex may recovery function with independent probability p_2 where $(p_1>p_2)$. So we definite expect of graph，and it is a polynomial of p_1 and p_2. And expect is a proper index of reliability. By means of deletion contraction edge formula，we have found that path graph，regular q-tree graph and cycle graph satisfy the second order characteristic equation. So we can calculate the coefficients with its initial value，and then the uniform form of general term is obtained.

Key words：two probability reliability；characteristic equation；regular q-tree；deletion contraction edge formula

责任编辑　廖　坤　崔玉洁