DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.006

一类带线性项非局部问题解的存在性与非存在性①

贾秀玲[1]， 段 誉[2]

1. 郑州工商学院 公共基础部，郑州 451400；2. 贵州工程应用技术学院 理学院，贵州 毕节 551700

摘要： 研究了一类非局部问题，利用山路引理和变分方法，获得该类问题的一个正解和一个负解，充实了非局部问题解的存在性理论，补充了已有的研究内容．同时，利用变分法获得了该问题非平凡解不存在的结果．

关 键 词： 非局部问题；线性项；正解；山路引理；变分法

中图分类号：O176.3 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000－5471(2018)10－0022－04

考虑如下一类非局部问题

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda u & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^{N}(N\geqslant 3)$ 是有界区域，$a,b,\lambda>0$ 为 3 个参数．特别指出的是，$\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u$ 这项使得问题(1) 中的方程不再是逐点相等．因此，问题(1) 被称为非局部问题．

十多年以来，如下非局部问题被广泛研究：

$$\begin{cases} -\left(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=f(x,u) & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

这里 $f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是满足一定条件的函数．问题(2) 源于 1883 年，Kirchhoff 研究的如下方程：

$$\rho\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}-\left(\frac{\rho_{0}}{h}+\frac{E}{2L}\int_{0}^{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2}\mathrm{d}x\right)\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=0$$

其中 ρ,ρ_{0},h,E,L 均为大于 0 的常数．直到 2003 年，文献[1] 首次利用变分方法研究了问题(2)，随后涌现了大量精彩的结果，如文献[2－6] 及其参考文献．

2015 年，文献[7] 率先研究了如下问题

$$\begin{cases} -\left(a-b\int_{\Omega}|\nabla u|^{2}\mathrm{d}x\right)\Delta u=\lambda|u|^{p-2}u & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中

① 收稿日期：2017－04－24
基金项目：国家自然科学基金项目(11661021)；贵州省科学技术厅科学技术联合基金项目(LH[2016]7054)；贵州省教育厅青年科技人才成长项目(KY[2017]297)．
作者简介：贾秀玲(1983-)，女，讲师，主要从事泛函微分方程定性理论的研究．
通信作者：段 誉，副教授，博士．

$$2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

并利用山路引理获得了问题(3)非平凡解的存在性．文献[8－9]研究了 $N=3$，$1<p<2$ 和 $N=3$，$p=1-\gamma(0<\gamma<1)$ 时问题(3)正解的存在性，并利用变分方法获得了问题(3)的两个正解．文献[10－11]也研究了问题(3)．但 $p=2$ 的情况没有被研究．一个自然的问题：当 $p=2$ 时，问题(3)(即问题(1))解的存在情况如何？

对任意的 $u\in H_0^1(\Omega)$，定义问题(1)对应的能量泛函为

$$I(u) = \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - \frac{b}{4}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x$$

其中记 $\| u \| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ 为空间 $H_0^1(\Omega)$ 的范数，$|u|_s = \left(\int_\Omega |u|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}$ 为空间 $L^s(\Omega)$ 的范数．如果 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且满足

$$(a - b\| u \|^2)\int_\Omega (\nabla u, \nabla\varphi)\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, \varphi\in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

则称 u 是问题(1)的解．

引理 1　设 $c<\dfrac{a^2}{4b}$，则泛函 I 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件．

证　泛函 I 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中满足 $(\mathrm{PS})_c$ 条件，即泛函 I 的任意一个 $(\mathrm{PS})_c$ 序列在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中一定存在收敛的子列．假设 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ 为泛函 I 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列，即当 $n\to\infty$ 时，有：

$$I(u_n)\to c \qquad I'(u_n)\to 0 \tag{5}$$

根据文献[7]中引理 2.2 的证明，我们只需证明 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中有界即可．由(5)式，我们可以推得

$$c + 1 + o(1)\| u_n \| \geqslant I(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \frac{b}{4}\| u \|^4$$

由此可推得 $\{u_n\}$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中有界．因此，引理 1 证毕．

令 λ_1 为算子 $-\Delta$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一个特征值，本文的主要结果为：

定理 1　假设 $0<\lambda<a\lambda_1$，则问题(1)至少存在一个正解和一个负解．

证　由 $0<\lambda<a\lambda_1$，很容易得到 $I(0)=0$ 是局部极小值，即 0 是泛函 I 的局部极小值点．对任意的 $t\in\mathbb{R}$，固定 $u\in H_0^1(\Omega)$ 且 $\| u\|\neq 0$，则当 $t\to\infty$ 时，可推得

$$I(tu) = \frac{at^2}{2}\| u \|^2 - \frac{bt^4}{4}\| u \|^4 - \frac{\lambda t^2}{2}|u|_2^2 \to -\infty$$

这就意味着，存在 $e\in H_0^1(\Omega)$ 且 $\| e \|$ 充分大，使得 $I(e)<0$．记

$$c_0 = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

其中

$$\Gamma = \{\gamma\in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0)=0, \gamma(1)=e\}$$

进一步，我们可得 $c_0<\dfrac{a^2}{4b}$．事实上，有

$$\max_{t\in[0,1]} I(te) = \max_{t\in[0,1]}\left(\frac{at^2}{2}\| e \|^2 - \frac{bt^4}{4}\| e \|^4 - \frac{\lambda t^2}{2}|e|_2^2\right) <$$
$$\max_{t\in[0,1]}\left(\frac{at^2}{2}\| e \|^2 - \frac{bt^4}{4}\| e \|^4\right) \leqslant \frac{a^2}{4b}$$

从而根据引理 1，由山路引理知，存在 $u_*\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $I(u_*)=c_0>0$．即 u_* 是问题(1)的非平凡解．由于 $I(u)=I(|u|)$，根据文献[12]中的定理 10，可推得 $u_*\geqslant 0$．故 u_* 是问题(1)的非平凡的非负解．一方面，根据(4)式，可得

$$(a-b\|u_*\|^2)\int_\Omega(\nabla u_*,\nabla\varphi)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u_*\varphi\mathrm{d}x=0\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega)$$

特别地，取 $\varphi=u_*$，我们推得

$$(a-b\|u_*\|^2)\|u_*\|^2=\lambda\int_\Omega u_*^2\mathrm{d}x>0$$

即

$$(a-b\|u_*\|^2)>0\tag{6}$$

另一方面，u_* 满足等式

$$-\left(a-b\int_\Omega|\nabla u_*|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u_*=\lambda u_*$$

结合(6)式，可得

$$-\Delta u_*=\frac{\lambda u_*}{a-b\|u_*\|^2}\geqslant 0$$

从而，根据强极大值原理可得，u_* 是问题(1)的正解. 进一步可得

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_\Omega|\nabla(-u_*)|^2\mathrm{d}x\right)\Delta(-u_*)=\lambda(-u_*) & x\in\Omega\\ -u_*=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

这说明 $-u_*$ 是问题(1)的负解.

注1　定理1补充了文献[7-10]所研究的问题. 此外，与文献[7]相比，我们获得了一个正解和一个负解；与文献[8-9]相比，我们的结论对于 $N\geqslant 3$ 都成立.

定理2　假设 $\lambda\geqslant a\lambda_1$，则问题(1)不存在同号解.

证　反证法，不妨假设 $u_0(u_0\geqslant 0$ 且 $u_0\neq 0)$ 是问题(1)的非平凡的非负解，即有

$$\begin{cases}-\left(a-b\int_\Omega|\nabla u_0|^2\mathrm{d}x\right)\Delta u_0=\lambda u_0 & x\in\Omega\\ u_0=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{7}$$

记 φ_1 为 λ_1 对应的特征函数，显然 $\varphi_1\geqslant 0$ 且 $\varphi_1\neq 0$. 对问题(7)中第一个等式两边同时乘以 φ_1，然后在 Ω 上积分，可得

$$(a-b\|u_0\|^2)\int_\Omega(\nabla u_0,\nabla\varphi_1)\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u_0\varphi_1\mathrm{d}x=0$$

即

$$(\lambda-a\lambda_1)\int_\Omega u_0\varphi_1\mathrm{d}x=-b\lambda_1\|u_0\|^2\int_\Omega u_0\varphi_1\mathrm{d}x<0$$

从而可得 $\lambda<a\lambda_1$. 故当 $\lambda\geqslant a\lambda_1$ 时，问题(1)不存在同号解.

参考文献：

[1] MA T F, MUNOZ R J E. Positive Solutions for a Nonlinear Nonlocal Elliptic Tra-Nsmission Problem [J]. Appl Math Lett, 2003, 16(2): 243-248.

[2] ZHANG Z T, PERERA K. Sign Changing Solutions of Kirchhoff Type Problems Via Invariant Sets of Descent Flow [J]. J Math Anal Appl, 2006, 317(2): 456-463.

[3] XIE Q L, WU X P, TANG C L. Existence and Multiplicity of Solutions for Kirchhoff Type Problem with Critical Exponent [J]. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12(6): 2773-2786.

[4] NAIMEN D. The Critical Problem of Kirchhoff Type Elliptic Equations in Dimension Four [J]. J Differential Equations, 2014, 257(4): 1168-1193.

[5] 丁　瑶，廖家锋. 一类带临界指数的非齐次 Kirchhoff 型方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版),

2015，40(12)：17－21.

[6] 廖家锋，张　鹏，唐春雷. 一类渐近 4 次线性 Kirchhoff 方程的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(8)：19－22.

[7] YIN G S，LIU J S. Existence and Multiplicity of Nontrivial Solutions for a Nonlocal Problem [J]. Bound Value Probl，2015(1)：1－7 .

[8] LEI C Y，LIAO J F，SUO H M. Multiple Positive Solutions for Nonlocal Problems Involving a Sign-Changing Potential [J]. Electronic J Differential Equations，2017(9)：1－8.

[9] LEI C Y，CHU C M，SUO H M. Positive Solutions for a Nonlocal Problem with Singularity [J]. Electronic J Differential Equations，2017，85：1－9.

[10] 李红英. 一类非局部问题的多解性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(6)：24－27.

[11] 唐之韵，欧增奇. 一类非局部问题解的存在性与多重性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(4)：48－52.

[12] BERESTYCKI H，CAPUZZO-DOLECTTA I，NIRENBERG L. Variational Methods for Indefinite Superlinear Homogeneous Elliptic Problems [J]. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl，1995(2)：553－572.

Existence and Nonexistence of Solutions for a Class of Nonlocal Problems with Linear Term

JIA Xiu-ling[1]，　DUAN　Yu[2]

1. Department of Public Basic Education，Zhengzhou Technology and Business University，Zhengzhou 451400，China；

2. College of Science，Guizhou University of Engineering Science，Bijie，Guizhou 551700，China

Abstract：A class of nonlocal problems is considered. By the Mountain Pass Lemma and the variational method，a positive solution and a negative for this problem are obtained，which enrich the theories of solutions for nonlocal problems. Moreover，the nonexistence result is obtained by the variational method.

Key words：nonlocal problem；linear term；positive solutions；Mountain Pass Lemma；variational method

责任编辑　廖　坤　崔玉洁