第 43 卷 第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 10 月
Vol. 43 No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct. 2018

DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.007

具有可反测地线奇异的(α, β)-度量[①]

刘丽红，　陈光祖

华东交通大学 理学院，南昌 330013

摘要： 如果 Finsler 空间中的测地线沿相同的路径反向也是一条测地线，则称该 Finsler 空间具有可反的测地线. 当流形维数 $n>2$ 时，已刻画了具有可反测地线的(α,β)-度量，但是并没有考虑奇异的情形. 无论奇异与否，当流形维数 $n>2$ 时，给出了具有可反测地线的(α,β)-空间的分类. 进一步，也证明了可反的 Finsler 空间在进行了 Kropina 变换之后仍具有可反的测地线.

关　键　词： 奇异的(α,β)-度量；Kropina 变换；可反的测地线

中图分类号：O186　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2018)10-0026-05

在 Finsler 几何中，如果流形 M 上的 Finsler 度量满足

$$F(x, y) = F(x, -y) \qquad \forall\, y \in T_xM$$

则称其为可反的. 可反性这个条件很强，它限制了大量有趣的Finsler度量的例子. 当$\phi(s) \neq \phi(-s)$时，(α, β)-度量 $F = \alpha\phi(s)$，$s = \dfrac{\beta}{\alpha}$ 便是不可反的，其中 α 是黎曼度量，β 是 1-形式. 特别地，当 $\phi(s) = 1 + s$ 时，F 为 Randers 度量. 如果 $\beta \neq 0$，很明显 Randers 度量不可反. 一般地，Finsler 度量都不可反. 因此，研究 Finsler 度量时，我们并不强加可反的条件.

流形 M 上的 Finsler 度量 F 可以诱导一个喷射

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

其中

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}([F^2]_{x^m y^l} y^m - [F^2]_{x^l})$$

且$g_{ij} = \dfrac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}$，$g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$. 做映射$\rho$：$(x, y) \in TM \longrightarrow (x, y) \in TM$，称$\bar{G} = -\rho_* G$为$G$的反向喷射，也即

$$\bar{G} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, -y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

令 C：$[0, 1] \longrightarrow M$ 是(M, F)上的一条曲线. 容易证明 $C = C(t)$ 是喷射 G 的一条积分曲线当且仅当$\bar{C} = C(1-t)$ 是反向喷射 $\bar{G}$ 的积分曲线. 如果对于 F 的任何一条测地线 $C(t)$，其反向测地线$\bar{C} = C(1-t)$ 也是 F 的测地线，则称 Finsler 度量 F 具有可反测地线. 很明显，可反的 Finsler 度量具有可反的测地线. 因此，研究具有可反测地线的不可反的 Finsler 度量很有意义.

---

① 收稿日期：2018-01-25
作者简介：刘丽红(1983-)，女，助教，主要从事黎曼-芬斯勒几何研究.

文献[1]展示：s^2 上具有常旗曲率 1 和可反的测地线的 Finsler 度量必为黎曼度量．文献[2]证明了 Randers 度量 $F=\alpha+\beta$ 具有可反的测地线当且仅当 β 是闭的．文献[3]研究了当流形维数 $n>2$ 时具有可反测地线与严格可反测地线的(α,β)-度量，得到：

定理 1[3]　令 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 是流形 M（维数大于 2）的一个不可反的(α,β)-度量．则 F 具有可反测地线当且仅当下面情形成立：

(i) F 满足 $\phi(s)=k_1\phi(-s)+k_2 s$，其中 $k_1\neq 0$，k_2 是常数且 β 是闭的，但是 β 关于黎曼度量 α 并不平行；

(ii) β 平行于 α，此时，F 是一个 Berwald 度量．

注 1　定理 1 并不准确．如果(α,β)-度量 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 中的 $\phi=1/s$，此时的(α,β)-度量称为 Kropina 度量．Kropina 度量是奇异的，在物理学中有重要意义．无论 α 与 β 的选择如何，Kropina 度量具有可反的测地线．显然，Kropina 度量并不满足定理 1 的任何情况．

本文得到了更为准确的(α,β)-度量具有可反测地线的充分必要条件：

定理 2　令 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 是流形 M（维数大于 2）上不可反的(α,β)-度量．则 F 具有可反测地线当且仅当下面情形成立：

(i) 无论 α 与 β 的选择如何，F 满足 $\phi(s)=-\phi(-s)$；

(ii) F 满足 $\phi(s)=k_1\phi(-s)+k_2 s$，其中 $k_1,k_2\neq 0$ 是常数且 β 是闭的，但是 β 关于黎曼度量 α 并不平行；

(iii) β 关于 α 是平行的，此时，F 是一个 Berwald 度量．

注 2　定理 2 把定理 1 漏掉的情况补上了，并且证明更为简洁．

1　具有可反测地线的(α,β)-度量

由定义容易知道，Finsler 空间具有可反的测地线当且仅当

$$\bar{G}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial F}{\partial x^i}=0$$

或者等价于当且仅当 F 与 $\bar{F}$ 是射影等价的，也即

$$G^i(x,y)=G^i(x,-y)+P(x,y)y^i$$

其中 $P(x,y)$ 是 TM 上的标量函数．

设 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 是流形 M 的(α,β)-度量，其中 α 是黎曼度量，β 是 1-形式．令 G^i 和 G^i_α 分别表示 F 与 α 的测地系数．记：

$$r_{ij}=\frac{1}{2}(b_{i|j}+b_{j|i})\qquad s_{ij}=\frac{1}{2}(b_{i|j}-b_{j|i})$$

$$b_i=a^{il}b_l\qquad s^i=a^{il}s_{lj}\qquad s_i=b^js_{ji}$$

其中 $a^{ij}=(a_{ij})^{-1}$ 且 $b_{i|j}$ 表示 β 关于 α 的协变导数，则(α,β)-度量的 Spary 系数的表达式为[4]：

$$G^i=G^i_\alpha+\alpha Qs^i_0+\{-2Q\alpha s_0+r_{00}\}\{\Psi b^i+\Theta\alpha^{-1}y^i\}\tag{1}$$

其中：

$$Q=\frac{\phi'}{\phi-s\phi'}$$

$$\Theta=\frac{\phi\phi'-s(\phi\phi''+\phi'\phi')}{2\phi[(\phi-s\phi')+(b^2-s^2)\phi'']}$$

$$\Psi=\frac{\phi''}{2[(\phi-s\phi')+(b^2-s^2)\phi'']}$$

且：

$$s^i_0=s^i_jy^j\qquad s_0=s_iy^i\qquad r_{00}=r_{ij}y^iy^j$$

如果 F 具有可反的测地线，则

$$G^i(x, y) = G^i(x, -y) + P(x, y)y^i \tag{2}$$

记：

$$Z_1 = Q(s) + Q(-s) \qquad Z_2 = \Psi(s) + \Psi(-s)$$

$$Z_3 = Q(s)\Psi(s) + Q(-s)\Psi(-s)$$

由(1)式和(2)式，则存在 TM 上的标量函数 $\lambda = \lambda(x, y)$，使得

$$\alpha Z_1 s_0^i + (Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0)b^i = \lambda y^i \tag{3}$$

用 $a_{ij}y^j$ 缩并(3)式，得

$$\lambda(x, y) = \alpha^{-1} s Z_2 r_{00} - 2sZ_3 s_0$$

将其回带入(3)式，得

$$\alpha Z_1 s_0^i + (Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0)\left(b^i - \frac{s}{\alpha}y^i\right) = 0 \tag{4}$$

再用 b_i 缩并(4)式，得

$$\alpha Z_1 s_0 + (Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0)(b^2 - s^2) = 0 \tag{5}$$

注意到 α 是正定的黎曼度量，联合(4)式和(5)式，消去 $Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0$，得

$$Z_1\left[(b^2 - s^2)s_0^i - \left(b^i - \frac{s}{\alpha}y^i\right)s_0\right] = 0 \tag{6}$$

因此，有以下命题：

命题 1 如果 $F = \alpha\phi(s)$，$s = \beta/\alpha$ 是流形 M 的(α, β)-度量，则 F 具有可反的测地线当且仅当下面情形之一成立：

(a) $\begin{cases} Z_1 = 0 \\ Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0 = 0 \end{cases}$；

(b) $\begin{cases} \alpha Z_1 s_0 + (Z_2 r_{00} - 2\alpha Z_3 s_0)(b^2 - s^2) = 0 \\ (b^2 - s^2)s_0^i - \left(b^i - \dfrac{s}{\alpha}y^i\right)s_0 = 0 \end{cases}$.

对于命题 1 中的情形(a)，可以证明：

引理 1 如果 $\phi(s)$ 满足 $Z_1 = 0$，则 $\phi(s) = k\phi(-s)$，其中 k 为常数. 此时，$Z_2 = Z_3 = 0$.

证 由(1)式中 Q 的表达式可知

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s) - s\phi'(s)} = \frac{-\phi'(-s)}{\phi(-s) + s\phi'(-s)} \tag{7}$$

即

$$\phi'(s)\phi(-s) + \phi(s)\phi'(-s) = 0$$

其中

$$\phi'(-s) = \left.\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-s} = -\frac{\mathrm{d}\phi(-s)}{\mathrm{d}s}$$

该式暗示

$$\left[\frac{\phi(s)}{\phi(-s)}\right]' = 0$$

因此，引理 1 成立.

注 3 由引理 1，命题 1 中的情形(a)便可以简化为只需要满足 $Z_1 = 0$ 即可.

注 4 如果 $\phi(s) = k\phi(-s)$，令 $s = -s$，便有 $\phi(-s) = k\phi(s)$，这也说明 $k = \pm 1$. 因此，(α, β)-度量是可反的或者满足 $\phi(s) = -\phi(-s)$，如 Kropina 度量便满足后者.

引理 2[5] 如果 $\phi(s)$ 满足 $Z_2 = 0$，则 $\phi(s) = k_1\phi(-s) + k_2 s$，其中 k_1, k_2 是常数.

现在，考虑命题 1 中的情形(b)，可得：

引理 3　令 $F=\alpha\phi(s)$，$s=\beta/\alpha$ 是流形 M(维数大于 2) 的(α,β)-度量. 如果 F 满足命题 1 中情形(b) 的第二个等式，则 β 是闭的.

证　在命题 1 情形(b) 中的第二个式子两边同时乘以 α^2，得

$$\alpha^2(b^2 s_0^i - b^i s_0) = \beta(\beta s_0^i - s_0 y^i) \tag{8}$$

由于黎曼度量是不可约的，(8) 式暗示存在流形 M 的标量函数 $f^i(x)$，使得：

$$\beta s_0^i - s_0 y^i = f^i \alpha^2 \tag{9}$$

$$b^2 s_0^i - b^i s_0 = f^i \beta \tag{10}$$

对(10) 式两边关于 y^j 求导，并用 b^j 做缩并，可得 $f^i=-s^i$，则(10) 式可以被改成

$$s_{i0} = \frac{1}{b^2}(b_i s_0 - s_i \beta) \tag{11}$$

对(9) 式两边分别关于 y^j 和 y^k 求导，得

$$s_{ij} b_k + s_{ik} b_j - s_k a_{ij} - s_j a_{ik} = 2 f_i a_{jk} \tag{12}$$

用 a^{ik} 缩并(12) 式，有 $(n-2)s_j=0$. 再由(11) 式可得 $s_{ij}=0$，也即 β 是闭的.

至此，定理 2 得证.

2　Kropina 变换

在 Finsler 几何中，存在着一类变换：

$$\tilde{F}(x, y) = F(x, y) + \hat{\beta}$$

其中 $\hat{\beta}$ 是流形上的 1-形式. 如果 F 是黎曼度量，则 $\tilde{F}$ 便为 Randers 度量. 因此该变换称为 Randers 变换. 文献[2] 在度量 F 可反的情况下，证明了 $\tilde{F}$ 具有可反的测地线当且仅当 1-形式 $\hat{\beta}$ 是闭的. 文献[3] 在 1-形式 $\hat{\beta}$ 闭的情况下，证明了 $\tilde{F}$ 具有可反的测地线当且仅当 F 具有可反的测地线.

在 Finsler 几何中，还存在另外一种重要的变换：

$$\hat{F}(x, y) = \frac{F^2}{\hat{\beta}}$$

如果 F 是黎曼度量，则 $\hat{F}$ 便为 Kropina 度量. 因此该变换称为 Kropina 变换. 当 F 可反时，经过 Kropina 变换，显然 $\hat{F}(x,-y)=-\hat{F}(x,y)$，又因为

$$\bar{G}\left(\frac{\partial \hat{F}(x,-y)}{\partial y^i}\right) - \frac{\partial \hat{F}(x,-y)}{\partial x^i} = 0$$

便可得

$$\bar{G}\left(\frac{\partial \hat{F}(x,y)}{\partial y^i}\right) - \frac{\partial \hat{F}(x,y)}{\partial x^i} = 0$$

这就说明 $\hat{F}$ 具有可反的测地线. 因此有：

定理 3　假设 F 是流形 M 上可反的 Finsler 度量，则 $\hat{F}(x,y)=\dfrac{F^2}{\hat{\beta}}$ 必具有可反的测地线.

定理 3 中的条件“F 是流形 M 上可反的 Finsler 度量”不能被去掉，考虑以下例子：

例 1　令 $F=\alpha+\beta$ 是 Randers 度量，且 1-形式 β 不是闭的，因此 F 具有不可反的测地线[3]. 取 $\hat{\beta}=\beta$，做 Kropina 变换

$$\hat{F} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\beta} = \alpha\phi(s)$$

其中 $\phi(s)=\dfrac{(1+s)^2}{s}$. 当流形维数大于2时，注意到 β 不是闭的，所以 $\hat{F}$ 不满足定理2中的任何一种情形，这也说明 $\hat{F}$ 的测地线不可反. 而当流形维数等于2时，文献[5]证明了任何具有可反测地线的 (α,β)-度量必须满足 β 是闭的或者定理2中的情形(i). 因此，$\hat{F}$ 的测地线不可反.

参考文献：

[1] BRYANT R. Geodesically Reversible Finsler 2-Spheres on Constant Curvature [J]. Griffiths Nankai Tracts in Math, 2006, 11: 95-111.

[2] CRAMPIN M. Randers Spaces with Reversible Geodesics [J]. Publ Math Debrecen, 2005, 67(3/4): 401-409.

[3] MASCA I M, SABAU S V, SHIMADA H. Reversible Geodesics for (α, β)-Metrics [J]. Internat J Math, 2010, 21(8): 1071-1094.

[4] CHERN S S, SHEN Z. Rieman-Finsler Geometry [J]. World Scientific, 2005, 1(4): 485-498.

[5] MASCA I M, SABAU S V, SHIMADA H. Two-Dimensional (α, β)-Metrics with Reversible Geodesics [J]. Publ Math Debrecen, 2013, 82(2): 485-501.

On Singular (α,β)-Metrics with Reversible Geodesics

LIU Li-hong, CHEN Guang-zu

College of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China

Abstract: A Finsler space is said to have reversible geodesics if for any of its oriented geodesic paths, the same path traversed in the opposite sense is also a geodesic. I M Masca, S V Sabau and H Shimada characterize the (α,β)-metrics with reversible geodesics when the dimension $n>2$, but they do not think about the singular (α,β)-metrics. In this paper, whether (α,β)-metrics are singular or not, we provides a complete classification of them with reversible geodesics when the dimension $n>2$. Further, we prove the Kropina change of a reversible Finsler metric must have reversible geodesics.

Key words: Singular (α,β)-Metrics; Kropina Change; Reversible Geodesic

责任编辑 廖 坤 崔玉洁