DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.008

关于局部对称空间的几个 Pinching 定理①

朱　华[1]，　陈　梦[2]

1. 攀枝花学院 数学与计算机学院，四川 攀枝花 617000；
2. 川北医学院 基础医学院，四川 南充 637100

摘要： 研究了局部对称空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，利用活动标架法和 Hopf 极大值原理讨论了子流形的 Pinching 问题，即估算子流形第二基本形式模长的平方的 Laplacian，再对截面曲率和 Ricci 曲率加以某种限制，得到这类子流形成为全脐子流形的几个拼挤定理.

关　键　词： 局部对称空间；平行平均曲率向量；伪脐子流形

中图分类号：O186.1　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2018)10-0031-04

用 N^{n+p} 表示截面曲率 K_N 满足 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$ 的 $n+p(p\geqslant 2)$ 维的局部对称的紧致的黎曼流形，M^n 是 N^{n+p} 的 n 维子流形. 文献[1] 讨论了常曲率空间中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，本文继续文献[2] 的研究，将文献[1] 的结论推广到局部对称空间中，得到以下关于截面曲率和 Ricci 曲率的 Pinching 定理：

定理 1　若 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$)，且 M^n 的截面曲率 R_{ijij} 满足

$$\tau^{\frac{1}{2}}R_{ijij}\geqslant\frac{1}{2n(p-1)+2}\Big[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}(np-n+2)+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(np-n+2)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(np-n+2)\tau^{\frac{1}{2}}+n(p-1)H^2\tau^{\frac{1}{2}}-2\delta\tau^{\frac{1}{2}}\Big]$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理 2　若 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($n\geqslant 2$)，且 M^n 的 Ricci 曲率在每点沿各方向的下确界 Q 满足

$$\tau^{\frac{1}{2}}Q\geqslant\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}-2\delta\tau^{\frac{1}{2}}+\tau^{\frac{1}{2}}-H^2\tau^{\frac{1}{2}}+(n-1)(1+H^2)\tau^{\frac{1}{2}}$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理 3　若 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形($p\geqslant 2$)，且 M^n 的 Ricci 曲率在每点沿各方向的下确界 Q 满足

$$\tau^{\frac{1}{2}}Q\geqslant\frac{1}{2p-3}\Big[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(n-1)(2p-3)(1+H^2)\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-1)(p-1)\tau^{\frac{1}{2}}-(p-1)H^2\tau^{\frac{1}{2}}\Big]$$

则 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

注 1　定理 1、定理 2 和定理 3 分别是文献[1] 中定理 1、定理 2 和定理 3 的推广.

---

①　收稿日期：2017-12-20
基金项目：国家自然科学基金项目(11471188).
作者简介：朱　华(1992-)，男，助教，主要从事微分几何的研究.

1 预备知识

设 M^n 是 $n+p$ 维黎曼流形 N^{n+p} 的 n 维子流形. 本文对各类指标取值范围作如下约定:

$$A,B,C,\cdots=1,\cdots,n,n+1,\cdots,n+p$$

$$i,j,k,\cdots=1,\cdots,n$$

$$\alpha,\beta,\gamma,\cdots=n+1,\cdots,n+p$$

当指标上下出现两次时代表对其求和.

在 N^{n+p} 内选取局部幺正标架场 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p}$,使得限制在 M^n 上时,向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 与 M^n 相切. 设幺正标架场 $\{\boldsymbol{e}\}_A$ 的对偶标架场为 $\{\boldsymbol{\omega}^A\}$,则 N^{n+p} 的结构方程为:

$$d\boldsymbol{\omega}^A=-\boldsymbol{\omega}_B^A\wedge\boldsymbol{\omega}^B \qquad \boldsymbol{\omega}_B^A+\boldsymbol{\omega}_A^B=0$$

$$d\boldsymbol{\omega}_B^A=-\boldsymbol{\omega}_C^A\wedge\boldsymbol{\omega}_B^C+\boldsymbol{\Phi}_B^A \qquad \boldsymbol{\Phi}_B^A=\frac{1}{2}K_{BCD}^A\boldsymbol{\omega}^C\wedge\boldsymbol{\omega}^D$$

将 $\boldsymbol{\omega}^\alpha$ 限制在 M^n 上时,有 $\boldsymbol{\omega}^\alpha=\boldsymbol{0}$,由 Cartan 引理得到:

$$\boldsymbol{\omega}_i^\alpha=h_{ij}^\alpha\boldsymbol{\omega}^j \qquad h_{ij}^\alpha=h_{ji}^\alpha$$

M^n 的结构方程为:

$$d\boldsymbol{\omega}^i=-\boldsymbol{\omega}_j^i\wedge\boldsymbol{\omega}^j \qquad \boldsymbol{\omega}_j^i+\boldsymbol{\omega}_i^j=0$$

$$d\boldsymbol{\omega}_j^i=-\boldsymbol{\omega}_k^i\wedge\boldsymbol{\omega}_j^k+\boldsymbol{\Phi}_j^i \qquad \boldsymbol{\Phi}_j^i=\frac{1}{2}R_{jkl}^i\boldsymbol{\omega}^k\wedge\boldsymbol{\omega}^l$$

M^n 的 Gauss 方程和 Ricci 方程分别为:

$$R_{jkl}^i=K_{jkl}^i+\sum_\alpha(h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha-h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \tag{1}$$

$$R_{\beta kl}^\alpha=K_{\beta kl}^\alpha+\sum_i(h_{ik}^\alpha h_{il}^\beta-h_{il}^\alpha h_{ik}^\beta) \tag{2}$$

其中 R 和 K 分别是 M^n 和 N^{n+p} 的曲率张量.

M^n 的第二基本形式局部表示成 $\boldsymbol{B}=h_{ij}^\alpha\boldsymbol{\omega}^i\otimes\boldsymbol{\omega}^j\otimes\boldsymbol{e}_\alpha$,分别用 $\boldsymbol{H}$,H,S 表示 M^n 的平均曲率向量、平均曲率和第二基本形式模长的平方,即:

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\boldsymbol{B}=\frac{1}{n}\sum_i\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_i)$$

$$H=\|\boldsymbol{H}\|=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_\alpha(\sum_i h_{ii}^\alpha)^2}$$

$$S=\|\boldsymbol{B}\|^2=\sum_{\alpha,i,j}(h_{ij}^\alpha)^2$$

M^n 的 Codazzi 方程和 Ricci 恒等式分别为:

$$h_{ijk}^\alpha-h_{ikj}^\alpha=-K_{ijk}^\alpha \tag{3}$$

$$h_{ijkl}^\alpha-h_{ijlk}^\alpha=\sum_m h_{im}^\alpha R_{jkl}^m+\sum_m h_{mj}^\alpha R_{ikl}^m-\sum_m h_{ij}^\beta R_{\beta kl}^\alpha \tag{4}$$

其中 h_{ijk}^α 和 h_{ijkl}^α 分别为 h_{ij}^α 与 h_{ijk}^α 的共变导数.

如果 $\boldsymbol{H}$ 在 M^n 的法丛中平行,则称 M^n 具有平行平均曲率向量. 用 $\boldsymbol{H}_\alpha$ 表示矩阵(h_{ij}^α),在 N^{n+p} 内选取标准正交标架场 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p}$,使 $\boldsymbol{H}=H\boldsymbol{e}_{n+p}$,则

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{H}_{n+p}=\sum_i h_{ii}^{n+p}=nH \qquad \mathrm{tr}\boldsymbol{H}_\alpha=\sum_i h_{ii}^\alpha=0 \qquad \alpha\neq n+p \tag{5}$$

设 M^n 是 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致子流形(参见文献[1]),则 H 为常数,且

$$\boldsymbol{\omega}_\alpha^{n+p}=0 \qquad R_{\alpha,n+p,kl}=0 \qquad \forall\alpha=n+1,\cdots,n+p \tag{6}$$

利用结构方程和(3),(4),(5)式,得到

$$\Delta h_{ij}^\alpha=-\sum_k(K_{kikj}^\alpha+K_{ijkk}^\alpha)+\sum_{k,m}(h_{km}^\alpha R_{ijk}^m+h_{mi}^\alpha R_{kjk}^m)-\sum_k\sum_\beta h_{ki}^\beta R_{\beta jk}^\alpha \qquad \alpha\neq n+p \tag{7}$$

其中 h_{ij}^α 的 Laplacian 为 $\Delta h_{ij}^\alpha=\sum_k h_{ijkk}^\alpha$.

若 N^{n+p} 为局部对称空间,即 $K_{BCD;E}^A=0$,应用文献[3]中公式(2.17)以及第一 Bianchi 恒等式和(2),(5)式,得到

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=-nH\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}K_{ijn+p}^{\alpha}+\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}(4K_{\beta ij}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-K_{k\beta k}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})+$$
$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})-\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]+$$
$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(4K_{n+pij}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{n+p}-K_{kn+pk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{n+p})\tag{8}$$

若 M^n 是伪脐的，则：

$$h_{ij}^{n+p}=H\delta_{ij}\qquad \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{n+p}^{2}=nH^{2}\tag{9}$$

此时，由(5) 式和(9) 式，得到(8) 式最后一项为 0，记

$$\tau=S-\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{n+p}^{2}=\sum_{\alpha\neq n+p}\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}(h_{ij}^{\alpha})^{2}\geqslant 0\tag{10}$$

由(9) 式和(10) 式，得到

$$\tau=S-nH^{2}\tag{11}$$

当 $\alpha,\beta\neq n+p$ 时，矩阵$(\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta}))$ 是$(p-1)$ 阶实对称矩阵，故可选取适当的法标架场 $\boldsymbol{e}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{e}_{n+p-1}$ 使其对角化，即

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta})=\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}\cdot\delta_{\alpha\beta}\tag{12}$$

利用(8),(9),(10),(12) 式，对于任何实数 a，有

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}=-nH\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}K_{ijn+p}^{\alpha}+\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}\sum_{i,j,k}(4K_{\beta,ij}^{\alpha}h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}-K_{k\beta k}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta})+$$
$$(1+a)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}R_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}R_{mkjk})-(1-a)\sum_{\alpha,\beta\neq n+p}[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2}\boldsymbol{H}_{\beta}^{2})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{H}_{\beta})^{2}]+$$
$$(1-a)\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k,m}h_{ij}^{\alpha}(h_{mk}^{\alpha}K_{mijk}+h_{mi}^{\alpha}K_{mkjk})+a\sum_{\alpha\neq n+p}(\operatorname{tr}\boldsymbol{H}_{\alpha}^{2})^{2}-anH^{2}\tau\tag{13}$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　设 M^n 是 $n+p$ 维 Riemann 流形 N^{n+p} 中具有平行平均曲率向量的紧致伪脐子流形，对(13) 式利用文献[4] 中定理 3.8.1 中的(4),(1) 式和文献[2] 中的(14)－(15),(17)－(19) 式，对于任何实数 $0\leqslant a\leqslant 1$，有

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-n\tau+$$
$$(1+a)nR_{M}\tau+(1-a)n\delta\tau+\frac{1}{2(p-1)}[a(np-n+2)-n(p-1)]\tau^{2}-anH^{2}\tau\tag{14}$$

其中 R_M 是 M^n 每点截面曲率的下确界. 令 $a=\dfrac{n(p-1)}{n(p-1)+2}$，则：

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant\frac{2n(p-1)+2}{n(p-1)+2}n\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\tau^{\frac{1}{2}}R_{M}-\frac{1}{2n(p-1)+2}\left[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}(np-n+2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(np-n+2)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(np-n+2)\tau^{\frac{1}{2}}+n(p-1)H^{2}\tau^{\frac{1}{2}}-2\delta\tau^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\tau=\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^{2}+\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\delta h_{ij}^{\alpha}\tag{16}$$

由(15) 式花括号里面的项大于或等于 0，由 Hopf 极大原理，则 τ 为常数，故 $\Delta\tau=0$，有 $\tau=0$ 或

$$\tau^{\frac{1}{2}}R_{M}=\frac{1}{2n(p-1)+2}\left[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}(np-n+2)+\right.$$
$$\left.\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(np-n+2)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(np-n+2)\tau^{\frac{1}{2}}+n(p-1)H^{2}\tau^{\frac{1}{2}}-2\delta\tau^{\frac{1}{2}}\right]\tag{17}$$

当(17) 式成立时，(14),(15) 式都为等式，于是 $\delta=1$，从而(15) 式变为

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\delta h_{ij}^{\alpha}=\frac{2n(p-1)+2}{n(p-1)+2}n\tau\left[R_{M}-\frac{n(p-1)}{2n(p-1)+2}(1+H^{2})\right]\tag{18}$$

即成为文献[1] 中的定理 1. 故 $\tau=0$，此时 M^n 是 N^{n+p} 的全脐子流形. 而 $\tau=0$，即 $h_{ij}^{\alpha}=0(\forall i,j,\alpha\neq n+p)$，于是 M^n 关于其子法丛 $N_1=H^{\perp}$ 是全测地的，利用文献[5] 中的定理 1，故 M^n 一定是 N^{n+p} 的某个 $n+1$ 维全测地子流形的全脐点超曲面.

定理2的证明 在(13)式中，令 $a=-1$，由文献[3]中的(4.4),(4.3)式，文献[4]中定理3.8.1的(1)式和文献[2]中的(14)-(15),(17)-(19)式，得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-n\tau-4[(n-1)(1+H^{2})-Q]\tau-\frac{n-4}{n}[n(n-1)(1+H^{2})-nQ]\tau+2n\delta\tau+nH^{2}\tau=$$

$$n\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\tau^{\frac{1}{2}}Q-\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+2\delta\tau^{\frac{1}{2}}-\tau^{\frac{1}{2}}+H^{2}\tau^{\frac{1}{2}}-(n-1)(1+H^{2})\tau^{\frac{1}{2}}\right\}$$

类似定理1的论证，便得到定理2.

定理3的证明 在(13)式中，令 $a=-1$，由文献[6]中的(4.3)式，文献[4]中的定理3.8.1和文献[2]中的(14)-(15),(17)-(19)式，得

$$\sum_{\alpha\neq n+p}\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}\Delta h_{ij}^{\alpha}\geqslant-\frac{2}{3}n^{2}H(1-\delta)(p-1)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}n^{\frac{3}{2}}(1-\delta)(p-2)\tau-n\tau-\frac{2p-3}{p-1}[n(n-1)(1+H^{2})-nQ]\tau+2n\delta\tau+nH^{2}\tau=$$

$$\frac{2p-3}{p-1}n\tau^{\frac{1}{2}}\left\{\tau^{\frac{1}{2}}Q-\frac{1}{2p-3}\left[\frac{2}{3}nH(1-\delta)(p-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{3}n^{\frac{1}{2}}(1-\delta)(p-1)(p-2)\tau^{\frac{1}{2}}+(n-1)(2p-3)(1+H^{2})\tau^{\frac{1}{2}}-(2\delta-1)(p-1)\tau^{\frac{1}{2}}-(p-1)H^{2}\tau^{\frac{1}{2}}\right]\right\}$$

类似定理1的论证，便得到定理3.

参考文献：

[1] 朱 华，王世莉，姚纯青，等．常曲率空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形[J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：74-78.

[2] 朱 华，王世莉，姚纯青．局部对称空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形[J]．西南大学学报(自然科学版)，2016，38(8)：67-73.

[3] CHERN S S，CARMO M，KOBAYASHI S. Minimal Submannifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length [J]. Functional Analysis and Related Fields，1970(5)：57-75.

[4] 纪永强．子流形几何[M]．北京：科学出版社，2004：198-209.

[5] YAU S T. Submanifolds with Constant Mean Curvature Ⅰ[J]. Amer J Math，1974，96(2)：346-366.

[6] 宋卫东．关于局部对称空间中的伪脐子流形[J]．数学研究与评论，1999，19(3)：611-616.

Several Pinching Theorems on Locally Symmetric Space

ZHU Hua[1]， CHEN Meng[2]

1. School of Mathematics and Computer Science，Panzhihua University，Panzhihua Sichuan 617000，China；

2. School of Basic Medical Science，North Sichuan Medical College，Nanchong Sichuan 637100，China

Abstract：This paper is mainly to discuss the compact pseudo-umbilical submanifold with parallel mean curvature vector in the locally symmetric space，by means of the active frame method and the Hopf maximum principle. We have studied the Pinching problem of submanifold that we get some rigidity theorems by estimating the Laplacian of the square of the length of the second fundamental form and giving some restrictions to the sectional curvature and the Ricci curvature，and we get some pinching theorems that M^n can become a totally umbilical submanifold.

Key words：the locally symmetric space；parallel mean curvature vector；pseudo-umbilical submanifold

责任编辑 廖 坤 崔玉洁