第 43 卷 第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 10 月
Vol. 43 No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.10.028

研究性学习在线性变换教学中的应用[①]

喻厚义， 唐 康

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：研究性学习是数学教学中一种重要的教学方式，通过考虑两个线性映射的值域与核之间的关系，得到了 Sylvester 不等式和 Frobenius 不等式的证明，并且给出这两个不等式中等号成立的充分必要条件，为研究性学习提供了一个教学案例.

关 键 词：研究性学习；线性映射；Sylvester 不等式；Frobenius 不等式

中图分类号：**G642.0**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2018)10-0168-05

研究性学习是学生在教师指导下，通过选择适当的课题，以类似于科学研究的方式，进行主动探究、拓展延伸，获得知识的一种学习方法，它既包括学生的“学”，也包括教师的“教”，是师生共同构建的一个过程[1-2]. 在具体的教学过程中，教师针对学习的内容提出问题，引导学生分析探讨，再现知识的发生过程，在探讨的过程中逐步形成对问题更深层的理解与认识，从而培养学生创造性解决问题的思维能力[3-4]. 这一教学方式有利于培养学生收集、分析和利用信息的能力，提高学生的基本素养.

数学本身具有理论抽象、逻辑严密的特点，这也决定了它是一个充满问题的学科，知识的掌握需要在不断地提出问题、解决问题、再提出问题、再解决问题的螺旋式上升过程中实现. 文献[5-6]探讨了数学教学的一些特定方式. 而研究性学习的过程正是围绕着一个需要解决的数学问题而展开，经过学生的直接参与探讨，并最终实现问题解决而结束. 因此，在数学的教学过程中就非常适合采用研究性学习的教学方式. 显然，能够提出合适的问题是整个研究性学习过程成功的关键. 事实上，对学生来说，学习一章新的知识、一个新的定理和公式、一个习题结论的推广应用，就是面临一个新的问题. 教师在设计问题时，要紧紧围绕基本概念和基本定理来进行，设计的问题应具有科学性、可探究性、层次性和内在逻辑性，能够把不同的知识点串起来形成知识链，帮助学生理解和掌握.

下面以高等代数中的线性变换为例，从文献[7]的一条注记出发，提出不同的问题，将线性变换、矩阵等不同知识点连成一串，提供一个研究性学习的案例.

1 问题的提出

为了方便起见，我们首先规定两个记号：对于数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$，我们用 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩；对于数域 $\mathbb{P}$ 上从线性空间 V 到 W 的线性映射 f，我们用 $\mathrm{rank}(f)$ 表示 f 的像空间 $\mathrm{Im}f$ 的维数，即

$$\mathrm{rank}(f)=\dim \mathrm{Im}\, f$$

线性空间上的线性变换是从二维几何平面和三维几何空间中的旋转、反射等变换抽象出来的，作为高等代数的重要内容之一，它一方面与矩阵有着很好的对应，另一方面也为理解线性空间的结构提供了有效的途径. 线性映射是比线性变换稍微广泛一点的概念，它也是联系同一数域上两个线性空间的桥梁. 在实

① 收稿日期：2018-03-07
基金项目：西南大学教学改革研究项目(2016JY058).
作者简介：喻厚义(1983-)，男，副教授，主要从事代数学研究.

际教学过程中，加强对线性变换和线性映射等概念的理解和运用，对提升学生的数学能力十分重要.

众所周知，一个有限维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域与核的维数之和等于该空间的维数. 然而，文献[7] 在给出上述结论之后，进一步指出，线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域与核的和并不一定是整个空间，换句话说，线性变换 $\mathscr{A}$ 的值域与核的和并不一定是直和. 熟知的结果是这两者的和为直和的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(\mathscr{A})=\mathrm{rank}(\mathscr{A}^2)$[8-10].

将上述结论进一步拓展，很自然地提出下述问题：把线性变换替换成线性映射，设 V_1,V_2,V_3 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 3 个有限维线性空间，$g: V_1\longrightarrow V_2$，$f: V_2\longrightarrow V_3$ 都是线性映射. 那么 $\ker f$ 与 $\mathrm{Im}\, g$ 的和是直和的充分必要条件是什么?

2 问题的解决

上述问题是通过对已有结论的深入思考，利用类比思维提出来的. 问题的解决需要根据学生已掌握的理论和知识，在教师的组织、引导下，让学生紧紧围绕问题进行独立思考、尝试探索. 通过对问题的细致分析，我们发现，$\ker f$ 与 $\mathrm{Im}\, g$ 的和为直和的充分必要条件是它们的交空间是零空间，因此问题解决的关键是对这个交空间的恰当描述. 以维数为主线，我们用定理 1 回答这一问题. 为此我们需要利用著名的 Sylvester 定理，即：

引理 1[11] 设 V,W 是数域 $\mathbb{P}$ 上的两个有限维线性空间，$f: V\longrightarrow W$ 是一个线性映射. 则

$$\mathrm{rank}(f)+\dim\ker f=\dim V$$

利用引理 1，我们有：

定理 1 设 V_1,V_2,V_3 是数域 $\mathbb{P}$ 上的 3 个有限维线性空间，$g: V_1\longrightarrow V_2$，$f: V_2\longrightarrow V_3$ 都是线性映射. 则：

(i) $\dim(\ker f\cap \mathrm{Im}\, g)=\mathrm{rank}(g)-\mathrm{rank}(fg)$;

(ii) $\ker f\subseteq \mathrm{Im}\, g\Leftrightarrow \mathrm{rank}(fg)=\mathrm{rank}(f)+\mathrm{rank}(g)-\dim V_2$;

(iii) $\ker f\supseteq \mathrm{Im}\, g\Leftrightarrow fg=0$;

(iv) $\ker f=\mathrm{Im}\, g\Leftrightarrow fg=0$，且 $\mathrm{rank}(f)+\mathrm{rank}(g)=\dim V_2$;

(v) $\ker f\cap \mathrm{Im}\, g=\{0\}\Leftrightarrow \mathrm{rank}(g)=\mathrm{rank}(fg)$;

(vi) $\ker f\oplus \mathrm{Im}\, g=V_2\Leftrightarrow \mathrm{rank}(f)=\mathrm{rank}(g)=\mathrm{rank}(fg)$.

证 (i) 由 $g: V_1\longrightarrow V_2$ 是线性映射知，$\mathrm{Im}\, g$ 是 V_2 的子空间，考虑线性映射 f 在 $\mathrm{Im}\, g$ 上的限制 $f|_{\mathrm{Im}\, g}: \mathrm{Im}\, g\longrightarrow V_3$. 根据引理 1，我们有

$$\mathrm{rank}(f|_{\mathrm{Im}\, g})+\dim\ker(f|_{\mathrm{Im}\, g})=\dim\mathrm{Im}\, g=\mathrm{rank}(g)$$

注意到

$$\mathrm{rank}(f|_{\mathrm{Im}\, g})=\mathrm{rank}(fg)$$

$$\dim\ker(f|_{\mathrm{Im}\, g})=\dim(\ker f\cap \mathrm{Im}\, g)$$

故结论(i) 成立.

(ii) 显然，$\ker f\subseteq \mathrm{Im}\, g$ 等价于 $\ker f=\ker f\cap \mathrm{Im}\, g$，从而等价于 $\dim\ker f=\dim(\ker f\cap \mathrm{Im}\, g)$. 由结论(i) 及引理 1 可知，这又等价于

$$\dim V_2-\mathrm{rank}(f)=\mathrm{rank}(g)-\mathrm{rank}(fg)$$

即

$$\mathrm{rank}(fg)=\mathrm{rank}(f)+\mathrm{rank}(g)-\dim V_2$$

(iii) 显然，$\ker f\supseteq \mathrm{Im}\, g$ 等价于 $\mathrm{Im}\, g=\ker f\cap \mathrm{Im}\, g$，从而等价于

$$\dim\mathrm{Im}\, g=\dim(\ker f\cap \mathrm{Im}\, g)$$

即

$$\mathrm{rank}(g)=\mathrm{rank}(g)-\mathrm{rank}(fg)$$

因此等价于 $fg=0$.

(iv) 由结论(ii) 与(iii) 可得.

(v) 由结论(i) 可得.

(vi) 因为 $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, g = V_2$ 等价于 $\ker f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0\}$ 且 $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, g = \dim V_2$，所以，由结论(v) 与引理 1 知，这等价于 $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = \mathrm{rank}(fg)$.

定理 1 的结论(v) 回答了我们的问题，结论(vi) 则进一步给出 $\ker f$ 与 $\mathrm{Im}\, g$ 的直和等于 V_2 的充分必要条件. 从结论(v) 来看，线性变换的相应结论是我们这一结果的特殊情况，即在定理 1 中，取 $V_1 = V_2 = V_3 = V$，$f = g = \mathscr{A}$，由结论(v) 立即可得下述结论：

推论 1　设 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的有限维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换. 则 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ 与 $\ker \mathscr{A}$ 的和是直和的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(\mathscr{A}) = \mathrm{rank}(\mathscr{A}^2)$.

作为定理 1 的应用，我们给出下面两个例子：

例 1　设 $\mathbb{P}[x]_n$ 表示数域 $\mathbb{P}$ 上由所有次数小于 n 的多项式和零多项式构成的线性空间，$\mathscr{D}$ 为 $\mathbb{P}[x]_n$ 上的微分变换. 则：

$$\mathrm{rank}(\mathscr{D}) = n - 1 \qquad \mathrm{rank}(\mathscr{D}^2) = n - 2$$

故由定理 1 的结论(ii) 知，$\ker \mathscr{D} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathscr{D}$. 例 1 也表明线性变换的值域与核的和并不一定是整个空间.

例 2　在复数域 $\mathbb{C}$ 上，取

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

并令 $g: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$，$f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ 都是线性映射，且对任意 $\alpha \in \mathbb{C}^2$，$\beta \in \mathbb{C}^3$，有：

$$f(\alpha) = \boldsymbol{A}\alpha \qquad g(\beta) = \boldsymbol{B}\beta$$

由于 $fg = 0$，$\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(g) = 1$，故根据定理 1 的结论(iv) 知，$\ker f = \mathrm{Im}(g)$. 而 $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \ker f$，故 $\ker f = \mathrm{Im}(g)$ 是由 $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 生成的一维子空间.

3　结论的应用

定理 1 是在考察一个线性映射的核与值域的关系时得到的结论，有趣的是，作为推论，可以很轻易地得到关于 Sylvester 不等式的一个新证明，并且能够给出该不等式中等号成立的充分必要条件. 我们也用类似的方法证明了与 Sylvester 不等式等价的 Frobenius 不等式.

著名的 Sylvester 不等式是关于矩阵秩的重要不等式，在文献[7] 中以习题的形式出现：设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{ns}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上的矩阵. 则

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

当 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵时，对应地有线性变换版本的结论：设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 是数域 $\mathbb{P}$ 上 n 维线性空间 V 的两个线性变换. 则

$$\mathrm{rank}(\mathscr{A}\mathscr{B}) \geqslant \mathrm{rank}(\mathscr{A}) + \mathrm{rank}(\mathscr{B}) - n$$

对于前者，很容易用分块矩阵的方法给出证明，然后，再利用矩阵与线性变换的对应关系，可直接得到后者的证明. 事实上，我们也可以运用线性映射的思想，先证明关于线性映射的 Sylvester 不等式，从而自然地得到前者的证明. 这一做法的好处是可以得到等号成立的充分必要条件.

推论 2　设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为数域 $\mathbb{P}$ 上 $m \times n$ 和 $n \times s$ 阶矩阵，则有 Sylvester 不等式

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

并且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的右零空间 $\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^n \mid A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}\}$ 包含在 $\boldsymbol{B}$ 的列空间里.

证　令 $g: \mathbb{P}^s \longrightarrow \mathbb{P}^n$，$f: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m$ 均为映射，使得对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^n$ 和 $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{P}^s$，都有：

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} \qquad g(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{BY}$$

显然 f,g 都是线性映射. 因为 $\ker f \cap \mathrm{Im}\, g \subseteq \ker f$，故 $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\, g) \leq \dim \ker f$. 由引理 1 和定理 1 的结论(i) 知

$$\mathrm{rank}(fg) \geqslant \mathrm{rank}(f) + \mathrm{rank}(g) - n$$

从而

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

据定理 1 的结论(ii)，等号成立当且仅当 $\ker f \subseteq \mathrm{Im}\ g$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右零空间$\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^n \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}\}$包含在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列空间里.

例 3[12]　(上海交通大学，2005 年硕士研究生入学试题) 假设数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 关于矩阵乘法可以相互交换，且 $\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BD} = \boldsymbol{E}_n$. 证明：

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

证　假设 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^n$，使得 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$. 则由已知条件可得

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BD})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{CAX} + \boldsymbol{BDX} = \boldsymbol{BDX}$$

故 $\boldsymbol{X}$ 属于 $\boldsymbol{B}$ 的列空间. 因此，由推论 2 得

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - n$$

Frobenius 不等式也是关于矩阵秩的一个重要不等式，它与 Sylvester 不等式是等价的，下面运用线性变换的思想给出前者的证明.

推论 3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是数域 $\mathbb{P}$ 上的 $r \times m$，$m \times n$，$n \times s$ 阶矩阵，则有 Frobenius 不等式

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$$

并且等号成立当且仅当$\{\boldsymbol{BY} \mid \boldsymbol{ABY} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{P}^n\} = \{\boldsymbol{BCX} \mid \boldsymbol{ABCX} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^s\}$.

证　设：

$$\begin{aligned} h:\ \mathbb{P}^s &\longrightarrow \mathbb{P}^n \qquad \boldsymbol{X} \longmapsto \boldsymbol{CX} \\ g:\ \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^m \qquad \boldsymbol{Y} \longmapsto \boldsymbol{BY} \\ f:\ \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}^r \qquad \boldsymbol{Z} \longmapsto \boldsymbol{AZ} \end{aligned}$$

则 f,g,h 均是线性映射. 因为 $\mathrm{Im}\ gh \subseteq \mathrm{Im}\ g$，所以

$$\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh \subseteq \ker f \cap \mathrm{Im}\ g$$

故

$$\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh) \leq \dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ g)$$

由定理 1 的结论(i) 知：

$$\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ g) = \mathrm{rank}(g) - \mathrm{rank}(fg) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \tag{1}$$

$$\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh) = \mathrm{rank}(gh) - \mathrm{rank}(fgh) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC}) \tag{2}$$

因此

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC})$$

即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC}) \geqslant \mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$.

根据(1) 式与(2) 式，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{rank}(\boldsymbol{BC}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$ 当且仅当 $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ g) = \dim(\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh)$. 因 $\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh \subseteq \ker f \cap \mathrm{Im}\ g$，故等号成立当且仅当 $\ker f \cap \mathrm{Im}\ g = \ker f \cap \mathrm{Im}\ gh$. 而：

$$\ker f \cap \mathrm{Im}\ g = \{\boldsymbol{BY} \mid \boldsymbol{ABY} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{P}^n\}$$

$$\ker f \cap \mathrm{Im}\ gh = \{\boldsymbol{BCX} \mid \boldsymbol{ABCX} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^s\}$$

所以等号成立当且仅当

$$\{\boldsymbol{BY} \mid \boldsymbol{ABY} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{P}^n\} = \{\boldsymbol{BCX} \mid \boldsymbol{ABCX} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{P}^s\}$$

4　小　　结

在考虑线性变换的值域与核的和是否为直和的过程中，我们用线性映射代替线性变换，通过考虑两个线性映射的值域与核之间的包含关系，得到该问题的一个解答，同时也得到 Sylvester 不等式的证明. 受此启发，用类似的方法，得到 Frobenius 不等式的一个证明. 更为有趣的是能够获得这两个不等式中等号成立的充分必要条件，这是用其它方法不易做到的. 这也进一步体现了线性变换和线性映射在线性代数中的重要性.

这一案例通过从教材的一个注记提炼问题，引导学生加以解决，并且在此基础上加以拓展应用，使学生从已有的知识实际出发，通过认真探究获得结论，逐步形成一种喜爱质疑、乐于探究、主动求知的心理倾向，重视解决实际问题的积极学习方式，激发他们探索、创新的欲望，树立追求真理的信念.

参考文献：

[1] 耿希峰，马丽枝，曲贵海. 教学型大学本科生的研究性学习与研究性教学 [J]. 黑龙江高教研究，2014，242(6)：148－150.

[2] 李召存. 研究性学习初探 [J]. 中国教育学刊，2001(1)：52－54.

[3] 刘崇林. 对数学课题研究性学习的几点思考 [J]. 教育探索，2006，177(3)：74－75.

[4] 彭伟强. 走进研究性学习 [M]. 北京：光明日报出版社，2014.

[5] 李婷婷，郝媛媛，刘 洋. 多元统计分析课程中实践教学向理论教学的渗透 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2017，42(12)：162－165.

[6] 裴 俊，乔 丽. 高等代数课程中问题驱动式教学法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(12)：171－175.

[7] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数 [M]. 4版. 北京：高等教育出版社，2013.

[8] 伍俊良，石聪聪. 一个矩阵F-范数不等式的推广 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(4)：50－53.

[9] 钟振华. 有限维线性空间中线性变换值域与核的关系 [J]，2015，30(3)：6－8.

[10] 朱一心，马雪松，范兴亚，等. 关于线性变换的像空间与核空间的直和 [J]. 数学的实践与认识，2012，42(18)：267－272.

[11] 郭聿琦，岑嘉评，王正攀. 高等代数教程 [M]. 北京：科学出版社，2014.

[12] 钱吉林. 高等代数题解精粹 [M]. 2版. 北京：中央民族大学出版社，2010.

Applications of Inquiry Learning in Teaching of Linear Transformations

YU Hou-yi， TANG Kang

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Inquiry learning is an important teaching method. A new example for inquiry learning has been provided by considering the relationship between the ranges and kernels of two linear maps. In the process，new proofs for Sylvester inequality and Frobenius inequality have been obtained，and the necessary and sufficient conditions for the two equalities satisfied have also been established.

Key words：inquiry learning；linear map；Sylvester inequality；Frobenius inequality

责任编辑 廖 坤 崔玉洁