第 43 卷 第 11 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 11 月
Vol. 43 No. 11 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Nov. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.11.003

离散型二维竞争系统中某群体消亡的条件①

周志轩， 杨逢建， 将春玲

广州大学 华软软件学院基础部，广州 510990

摘要： 研究了离散型二维竞争系统的渐近稳定性，得到了这类竞争系统中各类平衡点的坐标及其性质，获得了系统在边界上的平衡点处渐近稳定的一系列充分条件. 这些条件等价于该系统中的某个群体在竞争过程中消亡或被淘汰的相应条件.

关 键 词： 群体；竞争模型；渐近稳定性

中图分类号： O175.13 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2018)11-0013-05

研究单种群生物群体的渐近稳定性由来已久[1-6]. 在现实世界中，一个群体不可能孤立地存在，因而在研究群体的生存规律时，需要考虑同时存在的几个群体. 由于群体之间和群体内部竞争各种资源产生的相互影响，为此人们开始了对多种群竞争系统的研究. 很快人们发现，这种生物种群的竞争模型同样能反映相关经济实体(如企业、学校、医院等)的竞争[7]. 到目前为止，这种多个群体内外竞争的系统仅对连续型模型有少量的研究. 文献[8-9]研究了连续型二维竞争系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = a_1 M - b_1 M^2 - sMN \\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = a_2 N - b_2 N^2 - tMN \end{cases}$$

的渐近稳定性. 但从生物群体或经济实体的特点看，离散型模型更加切合实际. 杨逢建[10]研究了与上述连续模型对应的离散型二维竞争系统

$$\begin{cases} \Delta M_n = (a_1 - b_1 M_n - sN_n) M_n \\ \Delta N_n = (a_2 - b_2 N_n - tM_n) N_n \end{cases} \tag{1}$$

的正平衡点的渐近稳定性，获得了系统(1)存在正平衡点的条件，并得到了该系统关于正平衡点渐近稳定的一系列充分条件，也就是两个竞争群体的数量达到正平衡的条件(和谐相处条件)，但未能对系统(1)的其他平衡点作深入探讨. 本文讨论系统(1)在边界上的平衡点的渐近稳定性，将获得各类平衡点的坐标与相关性质、两群体无法达到正平衡的条件(永不和谐条件)、某个参与竞争的群体在竞争过程中消亡的条件(淘汰条件)和两个群体的相对优势发生转化的条件(逆转条件). 淘汰条件对应到生物系统，是某种群在竞争中灭绝的条件；对应到其他经济系统，是某个经济实体在竞争中被淘汰出局的条件.

在(1)式中：M_n，N_n 分别为群体 I 和群体 II 的即时存量；a_1 和 a_2 分别为群体 I 和群体 II 的生命系数；b_1 和 b_2 分别是群体 I 和群体 II 的内部竞争系数；s，t 为两群体之间的竞争系数；a_i，b_i，s，t 均为正数.

---

① 收稿日期：2017-05-12
基金项目：广州市教育科学规划课题(1201534308).
作者简介：周志轩(1980-)，男，讲师，主要从事应用数学研究.
通信作者：杨逢建.

1 平衡点及其性质

记

$$A=\frac{a_1 b_2-s a_2}{b_1 b_2-st} \qquad B=\frac{a_2 b_1-t a_1}{b_1 b_2-st} \tag{2}$$

定理1 (ⅰ) 竞争系统(1)有平衡点 $O(0,0)$,$P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$,$Q\left(0,\frac{a_2}{b_2}\right)$和 $R(A,B)$,当 $A=0$ 时 $R(A,B)$ 与 $Q\left(0,\frac{a_2}{b_2}\right)$重合,当 $B=0$ 时 $R(A,B)$ 与 $P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$重合.

(ⅱ) 系统(1)中的两个群体永不和谐(达不到正平衡)的必要条件是 $A>0$ 和 $B>0$ 不同时成立.

(ⅲ) 当群体I消亡时,群体II有平衡量$\frac{a_2}{b_2}$;当群体II消亡时,群体I有平衡量$\frac{a_1}{b_1}$.

(ⅳ) 只要初始值(M_0,N_0)的两个分量都大于0,系统(1)中两个群体不会都消亡.

证 设系统(1)的两个群体趋于平衡状态(M,N),即有

$$\lim_{n\to\infty} M_n=M \qquad \lim_{n\to\infty} N_n=N \tag{3}$$

(1)式两端取极限得

$$\begin{cases} a_1 M-b_1 M^2-sMN=0 \\ a_2 N-b_2 N^2-tMN=0 \end{cases} \tag{4}$$

由方程组(4)可解出平衡点 $O(0,0)$,$P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$,$Q\left(0,\frac{a_2}{b_2}\right)$和 $R(A,B)$.

当且仅当$\frac{b_1}{t}<\frac{a_1}{a_2}<\frac{s}{b_2}$或$\frac{s}{b_2}<\frac{a_1}{a_2}<\frac{b_1}{t}$时,$A>0$ 与 $B>0$ 同时成立[10],又有 a_i,b_i,s,t 均为正数,故方程组(4)的解非负.当 $A=0$ 时,$a_1 b_2=s a_2 \Rightarrow a_2 b_1 b_2-t a_1 b_2=a_2 b_1 b_2-st a_2 \Rightarrow \frac{a_2 b_1-t a_1}{b_1 b_2-st}=\frac{a_2}{b_2}$. 此时$R(A,B)$与 $Q\left(0,\frac{a_2}{b_2}\right)$重合.同理可知,当 $B=0$ 时,$R(A,B)$ 与 $P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$重合.

当且仅当 $A>0$ 且 $B>0$ 时,系统(1)有正平衡点 $R(A,B)$.文献[10]曾证明,当此正平衡点存在时,存在几个区域使系统(1)的解序列$\{(M_n,N_n)\}$在一定条件下关于正平衡点是渐近稳定的.因此,两个群体永远不能达到正平衡的必要条件是 $A>0$ 和 $B>0$ 不同时成立.

平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$意味着当群体II消亡时,群体I的平衡量为$\frac{a_1}{b_1}$;平衡点 $Q\left(0,\frac{a_2}{b_2}\right)$意味着当群体I消亡时,群体II的平衡量为$\frac{a_2}{b_2}$.这两种平衡要客观条件发生变化时才会改变.

平衡点 $O(0,0)$ 没有实际意义.事实上,设原点右上方由两坐标轴分别和直线 $a_1-b_1 x-sy=0$、$a_2-tx-b_2 y=0$ 所包围的区域的并集为 D,则当点$(M_n,N_n)\in D$ 时,$\Delta M_n=(a_1-b_1 M_n-sN_n)M_n>0$ 和 $\Delta_n=(a_2-b_2 N_n-tM_n)N_n>0$ 至少有一个成立,可见只要系统(1)的初始值(M_0,N_0)的分量都大于0,序列$\{M_n\}$和$\{N_n\}$就不会都趋于0.因此,两个群体不会同时消亡.

2 边界上的平衡点的渐近稳定性

定理2 设$\frac{a_2}{t}<\frac{a_1}{b_1}\leqslant\frac{1+a_2}{t}$,$a_1\leqslant 1$,区域 $D_1=\left\{(x,y)\middle|\frac{a_2}{t}\leqslant x\leqslant\frac{a_1}{b_1},\ 0<y\leqslant\frac{a_1-b_1 x}{s}\right\}$,$D_2=\left\{(x,y)\middle|A\leqslant x\leqslant\frac{a_2}{t},\ \frac{a_2-tx}{b_2}\leqslant y\leqslant\frac{a_1-b_1 x}{s}\right\}$(图1),则有:

(ⅰ) 平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1},0\right)$对于区域 D_1 是渐近稳定的.

（ⅱ）若进一步有 $a_2 \leqslant 1$，则平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$ 对于区域 $D_1 \cup D_2$ 是渐近稳定的.

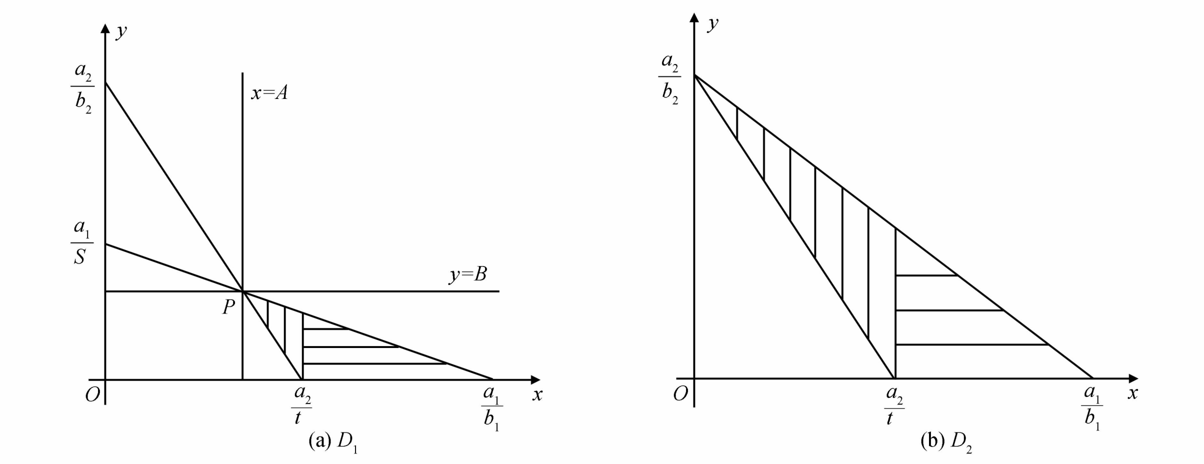

图 1　区域图

证　区域 $D_1 \cup D_2$ 位于直线 $a_2 - tx - b_2 y = 0$ 的上方，又由 $\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{1+a_2}{t}$ 知区域 $D_1 \cup D_2$ 位于直线 $1 + a_2 - tx - b_2 y = 0$ 的下方，故对任意给定的初始点 $(M_0, N_0) \in D_1 \cup D_2$，有

$$-1 \leqslant a_2 - b_2 N_0 - tM_0 \leqslant 0 \tag{5}$$

由(5)式可得

$$0 \leqslant N_1 = (1 + a_2)N_0 - b_2 N_0^2 - tM_0 N_0 = N_0 + (a_2 - b_2 N_0 - tM_0)N_0 \leqslant N_0 \tag{6}$$

由 $\frac{a_2}{t} < \frac{a_1}{b_1}$ 知 $D_1 \cup D_2$ 位于直线 $a_1 - b_1 x - sy = 0$ 的下方，故对于 $(M_0, N_0) \in D_1 \cup D_2$，有

$$a_1 - b_1 M_0 - sN_0 \geqslant 0 \tag{7}$$

由(7)式可得

$$M_1 = (1 + a_1)M_0 - b_1 M_0^2 - sM_0 N_0 = M_0 + (a_1 - b_1 M_0 - sN_0)M_0 \geqslant M_0 \tag{8}$$

又 $a_1 \leqslant 1$，(7)式两端同乘以 $1 - a_1$，得

$$a_1 - a_1^2 - b_1 M_0 + a_1 b_1 M_0 - sN_0 + sa_1 N_0 \geqslant 0 \tag{9}$$

即

$$a_1 - b_1 M_0 - b_1(a_1 - b_1 M_0 - sN_0) \cdot \frac{a_1}{b_1} - sN_0 \geqslant 0 \tag{9}$$

由于 $0 < M_0 < \frac{a_1}{b_1}$，由(9)式和(7)式有

$$a_1 - b_1 M_0 - b_1(a_1 - b_1 M_0 - sN_0) \cdot M_0 - sN_0 \geqslant 0 \tag{10}$$

由(5)式和(10)式有

$$a_1 - b_1 M_0 - b_1(a_1 - b_1 M_0 - sN_0) \cdot M_0 - sN_0 - s(a_2 - b_2 N_0 - tM_0)N_0 \geqslant 0$$

即

$$a_1 - b_1 M_1 - sN_1 \geqslant 0 \tag{11}$$

（ⅰ）当初始值 $(M_0, N_0) \in D_1$ 时，由(6),(8),(11)式知必有 $(M_1, N_1) \in D_1$. 递推知(1)式的解序列 $\{(M_n, N_n)\}$ 中恒有 $(M_n, N_n) \in D_1$，$\{M_n\}$ 单调递增，$\{N_n\}$ 单调递减. 又 D_1 是有界区域，因而存在极限 $\lim_{n\to\infty} M_n = M$，$\lim_{n\to\infty} N_n = N$. 由于系统(1)在区域 D_1 及其边界上只有一个平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$，故 $M = \frac{a_1}{b_1}$，$N = 0$. 因此序列 $\{(M_n, N_n)\}$ 收敛于系统的平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$.

（ⅱ）当初始值 $(M_0, N_0) \in D_2$ 时，由(6),(8)和(11)式知，只需 $a_2 - b_2 N_1 - tM_1 \leqslant 0$，则 $(M_1, N_1) \in$

$D_1 \cup D_2$.

由于$(M_0, N_0) \in D_2$，由(5)式有 $a_2 - b_2 N_0 - tM_0 \leqslant 0$. 故当 $a_2 \leqslant 1$ 时，有

$$a_2 - a_2^2 - b_2 N_0 + a_2 b_2 N_0 - tM_0 + a_2 tM_0 \leqslant 0$$

即

$$a_2 - b_2 N_0 - tM_0 - b_2 (a_2 - b_2 N_0 - tM_0) \frac{a_2}{b_2} \leqslant 0 \tag{12}$$

由于 $0 < N_0 < \frac{a_2}{b_2}$，由(12)式和 $a_2 - b_2 N_0 - tM_0 \leqslant 0$ 有

$$a_2 - b_2 N_0 - tM_0 - b_2 (a_2 - b_2 N_0 - tM_0) N_0 \leqslant 0 \tag{13}$$

由(13)式和(7)式可得

$$a_2 - b_2 N_0 - tM_0 - b_2 (a_2 - b_2 N_0 - tM_0) N_0 - t(a_1 - b_1 M_0 - sN_0) M_0 \leqslant 0$$

即

$$a_2 - b_2 N_1 - tM_1 \leqslant 0 \tag{14}$$

因此，$(M_1, N_1) \in D_1 \cup D_2$.

利用(ⅰ)的结论和方法递推可知，当$(M_0, N_0) \in D_1 \cup D_2$ 时，系统(1)的解序列$\{(M_n, N_n)\}$在此区域或边界上存在极限点，又区域 $D_1 \cup D_2$ 及其边界上系统(1)只有一个平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$. 因此序列$\{(M_n, N_n)\}$收敛于系统的平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$. 证毕.

定理 3 设$\frac{a_1}{s} < \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{1 + a_1}{s}$，$a_2 \leqslant 1$，区域 $D_3 = \left\{(x, y) \middle| \frac{a_1}{s} \leqslant y \leqslant \frac{a_2}{b_2}, 0 < x \leqslant \frac{a_2 - b_2 y}{t}\right\}$，$D_4 = \left\{(x, y) \middle| B \leqslant y \leqslant \frac{a_1}{s}, \frac{a_1 - sy}{b_1} \leqslant x \leqslant \frac{a_2 - b_2 y}{t}\right\}$，则有：

(ⅰ) 平衡点 $Q\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$对于区域 D_3 是渐近稳定的.

(ⅱ) 若进一步有 $a_1 \leqslant 1$，则平衡点 $Q\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$对于区域 $D_3 \cup D_4$ 是渐近稳定的.

证 本定理可以用定理 2 类似的方法证明，也可直接利用变量与区域的对称性得到，此处从略.

可以证明当$\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{s}$或$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{t}$而系统(1)存在正平衡点时，系统(1)的解序列将逐步远离边界上的平衡点，不会有某群体消亡，此时只需讨论系统没有正平衡点的情况.

定理 4 设 $a_1 \leqslant 1$，$a_2 \leqslant 1$，区域 $D_5 = \left\{(x, y) \middle| 0 < x \leqslant \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2 - tx}{b_2} \leqslant y \leqslant \frac{a_1 - b_1 x}{s}\right\}$，$D_6 = \left\{(x, y) \middle| 0 < y \leqslant \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1 - sy}{b_1} \leqslant x \leqslant \frac{a_2 - b_2 y}{t}\right\}$，则有

(ⅰ) 若$\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{s}$，$\frac{a_2}{t} = \frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{1 + a_2}{t}$，则平衡点 $P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$对于区域 D_5 是渐近稳定的.

(ⅱ) 若$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{t}$，$\frac{a_1}{s} = \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{1 + a_1}{s}$，则平衡点 $Q\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$对于区域 D_6 是渐近稳定的.

证 (ⅰ)的证明与定理 2 之(ⅱ)类似，(ⅱ)的证明与定理 3 之(ⅱ)类似，此处从略.

推论 1 设区域 $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ 如定理 2,3,4 所定义，则有：

(ⅰ) 若满足$\frac{a_2}{t} < \frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{1 + a_2}{t}$和 $a_1 \leqslant 1$，系统(1)中两个群体的某个数量点(M_n, N_n)落入区域 D_1，或进一步有 $a_2 \leqslant 1$ 且某个(M_n, N_n)落入区域 $D_1 \cup D_2$，或者$\frac{a_2}{b_2} < \frac{a_1}{s}$，$\frac{a_2}{t} = \frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{1 + a_2}{t}$，$a_1 \leqslant 1$，$a_2 \leqslant 1$，

且某个(M_n, N_n)落入区域D_5，则群体 II 将被淘汰，群体 I 将趋于平衡量$\frac{a_1}{b_1}$.

（ⅱ）若满足$\frac{a_1}{s} < \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{1+a_1}{s}$和$a_2 \leqslant 1$，系统(1)中的两个群体的某个数量点$(M_n, N_n)$落入区域$D_3$，或进一步有$a_1 \leqslant 1$且某个$(M_n, N_n)$落入区域$D_3 \cup D_4$，或者$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{t}$，$\frac{a_1}{s} = \frac{a_2}{b_2} \leqslant \frac{1+a_1}{s}$，$a_1 \leqslant 1$，$a_2 \leqslant 1$，且某个$(M_n, N_n)$落入区域$D_6$，则群体 I 将被淘汰，群体 II 将趋于平衡量$\frac{a_2}{b_2}$.

推论 2(逆转条件)　在定理 2 或定理 3 或定理 4 的条件成立时，种群间的相对优势与劣势可以逆转，也就是说，决定竞争结果的是系数而不是初值.

事实上，由图 1(b) 和定理 2 的结论可知，在定理 2 的条件成立时，在区域D_2中的初值点无论多靠近平衡点$Q\left(0, \frac{a_2}{b_2}\right)$，随着竞争过程的延续，解序列最终将趋于平衡点$P\left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$，即群体的数量优势将被逆转. 在定理 3 和定理 4 中也可看到类似的结果.

这种现象在现实竞争系统中也不罕见，可见模型(1)能真实反映客观世界.

参考文献：

[1]　MAY R M. Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos [J]. Journal of Theoretical Biology, 1975, 51(2): 511－524.

[2]　SO W H, YU J S. Global Stability in a Logistic Equation with Piecewise Constant Argument [J]. Hokkaido Mathematical Journal, 1995, 24(2): 269－286.

[3]　周　展，庾建设. 非自治时滞差分方程的线性化渐近稳定性 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版)，1998(3)：301－308.

[4]　GYORI I, LADAS G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations: with Applications [M]. Oxford: Oxford University Press, 1991.

[5]　杨逢建，罗毅平. 具有可变时滞的非自治离散 Logistic 方程的全局吸引性 [J]. 生物数学学报，2004，19(2)：193－198.

[6]　杨逢建，雷友发. 具有可变时滞的非线性非自治差分方程的振动性及其应用 [J]. 系统科学与数学，2004，24(3)：346－353.

[7]　余　露. 基于逻辑方程的企业集群竞争模型及稳定性分析 [J]. 商丘师范学院学报，2013，29(9)：32－34.

[8]　MURRAY J D. Mathematical Biology [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[9]　韩丽涛，原三领，马知恩. 两种群相互竞争的 SIRS 传染病模型的稳定性 [J]. 生物数学学报，2003，18(1)：21－26.

[10]　杨逢建，张超龙. 离散型二维竞争系统的渐近稳定性 [J]. 生物数学学报，2008，23(1)：85－90.

Extinction Conditions of Some Groups in a Discrete Competitive System of Two-Dimensional

ZHOU Zhi-xuan,　YANG Feng-jian,　JIANG Chun-ling

Basic Department of South China Institute of Software Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510990, China

Abstract: The asymptotic stability of discrete two-dimensional competitive system has been discussed. The coordinates and properties of various types of equilibrium in such competition systems has been obtained. Some sufficient conditions of asymptotic stability for the equilibriums on border in such system has been obtained, which is equivalent to the conditions of extinction of some groups in this competitive system.

Key words: group; competitive system; asymptotic stability

责任编辑　张　枸