第 43 卷 第 11 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 11 月
Vol. 43 No. 11　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Nov. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.11.004

一般次线性条件下脉冲方程的周期解①

姜黎鑫[1]， 丁　卫[2]

1. 南通师范高等专科学校 数理系，江苏 南通 226006；2. 南通大学 理学院，江苏 南通 226007

摘要：次线性条件下，脉冲系统

$$x''+f(t,\ x)=0,\ \text{a.e.}\ t\in[0,\ 2\pi]$$
$$\Delta x'(t_j):=x'(t_j^+)-x'(t_j^-)=I_j(x(t_j))\qquad j=1,2,\cdots,p$$

的周期解的存在性被广泛研究．这里的次线性主要体现在 $f(t,\ x)$ 被下面次线性函数控制：

$$|f(t,\ x)|\leqslant g(t)|x|^{\alpha}+h(t)$$

其中 $g,h\in L^1(0,2\pi;\ \mathbb{R}^+)$，$\alpha\in[0,\ 1)$．本文减弱了上述次线性控制的要求，利用临界点理论证明了当 $f(t,\ x)$ 满足某个函数类条件时，脉冲方程周期解是存在的，从而推广了相关结果．

关　键　词：脉冲哈密顿系统；周期解；次线性；临界点；鞍点定理

中图分类号：**O175**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000-5471(2018)11-0018-06

脉冲微分方程是描述动态过程中突然发生不连续跳跃的动力系统．对于该系统中的二阶方程 $x''+f(t,\ x,\ x')=0$，通常不仅要考虑位置 x 上的脉冲，也要考虑速度 x' 上的脉冲．但是，对于航天飞船的运动轨迹，我们有时仅需要考虑速度 x' 上产生了脉冲，而位置 x 没有变化[1-2]．近年来用变分法研究脉冲边值问题的文章可参见文献[3]及其参考文献．

本文考虑如下脉冲系统

$$x''+f(t,\ x)=0,\ \text{a.e.}\ t\in[0,\ 2\pi]\tag{1}$$

$$\Delta x'(t_j):=x'(t_j^+)-x'(t_j^-)=I_j(x(t_j)),\ j=1,2,\cdots,p\tag{2}$$

在周期边界条件

$$x(0)-x(2\pi)=x'(0)-x'(2\pi)=0\tag{3}$$

下的解，其中 $t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_p<t_{p+1}=2\pi$，$p$ 是某非负整数，并假设对每个 j，脉冲函数 I_j：$\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续．

为了确保变分泛函连续可微，先给函数 f 一个基本假设．称 f：$[0,\ 2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件是指其满足：

1) 对任意 $x\in\mathbb{R}$，$f(\cdot,\ x)$ 在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上可测；

2) 对 a.e. $t\in[0,\ 2\pi]$，$f(t,\ \cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续；

3) 存在函数 $u\in C(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+)$ 和 $v\in L^1(0,\ 2\pi;\ \mathbb{R}^+)$，使得对任意 $x\in\mathbb{R}$ 与 a.e. $t\in[0,\ 2\pi]$，

$$|F(t,\ x)|+|f(t,\ x)|\leqslant u(|x|)v(t)$$

① 收稿日期：2017-10-30
基金项目：国家自然科学基金项目(11501308)．
作者简介：姜黎鑫(1982-)，女，硕士研究生，主要从事动力系统研究．
通信作者：丁　卫，副教授，博士．

其中 $F(t,x)=\int_0^x f(t,s)\mathrm{d}s$.

为了保证次线性二阶哈密顿系统(1),(3) 周期解的存在性，有些文章会给出如下次线性假设：存在函数 $g,h\in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}^+)$ 和 $\alpha\in[0,1)$，使得

$$|f(t,x)|\leqslant g(t)|x|^{\alpha}+h(t) \tag{4}$$

具体可见文献[4－6]．在此前提下，如果方程还满足当 $|x|\to+\infty$ 时，

$$|x|^{-2\alpha}\int_0^{2\pi}F(t,x)\mathrm{d}t\to+\infty \tag{5}$$

则系统存在至少一个周期解．如果满足

$$|x|^{-2\alpha}F(t,x)\to+\infty$$

则可得无穷多不同的次调和解[5-6]．文献[7] 将条件(5) 减弱为

$$\liminf_{|x|\to+\infty}|x|^{-2\alpha}F(t,x)>\frac{1}{2}\|g\|_1^2,\ \text{a. e. } t\in[0,2\pi] \tag{6}$$

仍证明了系统 2π 周期解的存在性．进一步，还证明了如果脉冲系统(1),(2),(3) 满足次线性条件(4),(6) 和脉冲条件

$$|I_j(x)|\leqslant a|x|^{\gamma}+b,\ \forall x\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots,p$$

$$\left|\int_0^x I_j(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant a|x|^{2\gamma}+b,\ \forall x\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots,p$$

该系统存在 2π 周期解．一些关于二阶哈密顿系统解的结果可见文献[4,8－10].

条件(4) 被称为次线性是因为 f 被函数 $x^{\alpha}(\alpha\in[0,1))$ 控制．本文将 x^{α} 推广到一个函数集上去．为此，定义 $\Gamma=\{h\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$：$h$ 满足$(\mathrm{h}_1)-(\mathrm{h}_4)\}$，其中

(h_1) 存在某个固定常数 $C_1>0$，使得 $h(s)\leqslant h(t)+C_1$，对 $s,t\in[0,+\infty)$，$s\leqslant t$ 成立；

(h_2) 存在某个固定常数 $C_2>0$，使得 $h(s+t)\leqslant C_2((h(s)+h(t))$，对 $\forall s,t\in[0,+\infty)$ 成立；

(h_3) $th(t)-2H(t)\to-\infty$，当 $t\to+\infty$；

(h_4) $\dfrac{H(t)}{t^2}\to0$，当 $t\to+\infty$，

其中 $H(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$.

容易看出函数 $t^{\alpha}(\alpha\in[0,1))$ 与 $\ln(1+t)$ 都在 Γ 中.

命题 1[11]　若 $h\in\Gamma$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在一个仅依赖 ε 与 h 的正常数 C_{ε}，使得

1) $0<h(t)<\varepsilon t+C_{\varepsilon}$，$\forall t\in[0,+\infty)$；

2) $\dfrac{h^2(t)}{H(t)}\to0$，当 $t\to+\infty$；

3) $H(t)\to+\infty$，当 $t\to+\infty$；

4) $\dfrac{h(t)}{H(t)}\to0$，当 $t\to+\infty$.

将条件(4),(6) 替换为

$$|f(t,x)|\leqslant\gamma(t)h(|x|)+g(t) \tag{7}$$

其中：$h\in\Gamma$；$g,\gamma\in L^1(0,2\pi;\mathbb{R}^+)$.

$$\liminf_{|x|\to+\infty}\frac{F(t,x)-\dfrac{1}{2\pi}bpx}{H(x)}>\frac{1}{2\pi}ap,\ \text{a. e. } t\in[0,2\pi] \tag{8}$$

其中 a,b 来自下面的脉冲条件(9)．本文的主要结果如下.

定理 1　设 f：$[0,2\pi]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件，并假设存在常数 $a,b\geqslant0$，使得脉冲函数满足

$$|I_j(x)|\leqslant ah(|x|)+b,\ \forall x\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots,p \tag{9}$$

则如果条件(7)与(8)成立，那么脉冲系统(1),(2),(3)至少有一个 2π 周期解.

实际上，我们可以得到一个更一般的结论.

定理 2 将定理 1 中条件(8)换成

$$\liminf \frac{\int_0^{2\pi} F(t, x)\mathrm{d}t - bpx}{H(x)} > ap \tag{10}$$

定理 1 结论仍然成立.

当 $a = b = 0$ 或 $p = 0$，系统(1),(2),(3)退化为经典的哈密顿系统，从而可以得到如下结论.

推论 1 假设 f: $[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足 Carathéodory 条件并满足(7)式，若

$$\liminf \frac{\int_0^{2\pi} F(t, x)\mathrm{d}t}{H(x)} > 0$$

则系统(1)+(3)至少存在一个 2π 周期解.

1 变分结构

记 $H_{2\pi}^1 = \{x: [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid x(0) = x(2\pi), \int_0^{2\pi}(x'^2 + x^2)\mathrm{d}t < +\infty\}$，定义其上范数为 $\|x\| = \left(\int_0^{2\pi}(x'^2 + x^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$. 对 $x \in H_{2\pi}^1$，令 $\bar{x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\mathrm{d}t$，$\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}$，则下面两个估计式成立[4]：

$$\|\tilde{x}\|_\infty^2 \leqslant \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} x'^2(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{x}^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} x'^2(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

由(12)式可以得出

$$\left(\int_0^{2\pi} x'^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\tilde{x}\| \leqslant \sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi} x'^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

考虑定义在 $H_{2\pi}^1$ 上的泛函

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x'^2(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} F(t, x)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{p}\int_0^{x(t_j)} I_j(t)\mathrm{d}t$$

易知 $\varphi(x)$ 在 $H_{2\pi}^1$ 上是连续可微的[12]，且

$$\langle \varphi'(x), v\rangle = \int_0^{2\pi} x'(t)v'(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} f(t, x)v\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{p} I_j(x(t_j))v(t_j), \ \forall v \in H_{2\pi}^1$$

文献[7]已经证明了 $\varphi(x)$ 的临界点对应着脉冲问题的解：

引理 1[7] 如果 $x \in H_{2\pi}^1$ 是 φ 的一个临界点，则 x 是系统(1),(2),(3)的 2π 周期解.

2 脉冲周期解

引理 2 假设条件(7),(10)以及(9)成立. 则 φ 满足 P.S. 条件，即对 $H_{2\pi}^1$ 的任一序列 $\{x_n\}$，如果满足 $\{\varphi(x_n)\}$ 有界且当 $n \to \infty$ 时 $\varphi'(x_n) \to 0$，则该序列存在收敛子列.

证 由(7),(11),(h_1)以及(h_2)有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(t, x_n)\tilde{x}_n\mathrm{d}t\right| \leqslant & \int_0^{2\pi}\gamma(t)h(|x|)|\tilde{x}_n|\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} g(t)|\tilde{x}_n|\mathrm{d}t \leqslant \\ & \int_0^{2\pi}\gamma(t)(h(|\bar{x}_n| + \|\tilde{x}_n\|_\infty) + C_1)|\tilde{x}_n|\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} g(t)|\tilde{x}_n|\mathrm{d}t \leqslant \\ & \int_0^{2\pi} C_2\gamma(t)(h(|\bar{x}_n|) + h(\|\tilde{x}_n\|_\infty))|\tilde{x}_n|\mathrm{d}t + (c_1C_1 + c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty \leqslant \\ & c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty h(|\bar{x}_n|) + c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty h(\|\tilde{x}_n\|_\infty) + (c_1C_1 + c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty \leqslant\end{aligned}$$

$$c_1C_2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\|\tilde{x}'\|_2 h(|\bar{x}_n|)+c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty h(\|\tilde{x}_n\|_\infty)+(c_1C_1+c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty\leqslant$$

$$\frac{1}{2}c_1C_2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\left(\left(c_1C_2\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)^{-1}\|\tilde{x}'\|_2^2+c_1C_2\sqrt{\frac{\pi}{6}}h^2(|\bar{x}_n|)\right)+c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty h(\|\tilde{x}_n\|_\infty)+$$

$$(c_1C_1+c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty=$$

$$\frac{1}{2}\|\tilde{x}'\|_2^2+\frac{\pi}{12}c_1^2C_2^2h^2(|\bar{x}_n|)+c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty h(\|\tilde{x}_n\|_\infty)+(c_1C_1+c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty$$

其中：$c_1=\int_0^{2\pi}\gamma(t)\mathrm{d}t$，$c_2=\int_0^{2\pi}g(t)\mathrm{d}t$.

从而由命题 1 中(1) 以及不等式(11) 可知，对任意 x_n 以及任意小的 $\varepsilon>0$，总存在正常数 c_3 使得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}f(t,x_n)\tilde{x}_n\mathrm{d}t\right|\leqslant&\frac{1}{2}\|\tilde{x}'\|_2^2+\frac{\pi}{12}c_1^2C_2^2h^2(|\bar{x}_n|)+c_1C_2\|\tilde{x}_n\|_\infty(\varepsilon\|\tilde{x}_n\|_\infty+C_\varepsilon)+\\&(c_1C_1+c_2)\|\tilde{x}_n\|_\infty\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\tilde{x}'\|_2^2+c_3\|\tilde{x}'\|_2+c_3h^2(|\bar{x}_n|)\end{aligned}\tag{14}$$

同时由(9) 式，存在常数 $c_4>0$，使得对任意 $j=1,2,\cdots,p$ 有

$$\begin{aligned}|I_j(x_n(t_j))\tilde{x}_n(t_j)|\leqslant&(ah(|x_n(t_j)|)+b)|\tilde{x}_n(t_j)|\leqslant\\&a(h(|\bar{x}_n|+\|\tilde{x}_n\|_\infty)+b+C_1)|\tilde{x}_n(t_j)|\leqslant\\&aC_2h(|\bar{x}_n|)\|\tilde{x}_n\|_\infty+aC_2h(\|\tilde{x}_n\|_\infty)\|\tilde{x}_n\|_\infty+a(b+C_1)\|\tilde{x}_n\|_\infty\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\tilde{x}'\|_2^2+c_4\|\tilde{x}'\|_2+c_4h^2(|\bar{x}_n|)\end{aligned}\tag{15}$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi'(x_n)=0$，由(13),(14),(15) 式有

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}'_n\|_2\geqslant&|\langle\varphi'(x_n),\tilde{x}_n\rangle|=\\&\left|\int_0^{2\pi}x_n'^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}f(t,x_n)\tilde{x}_n\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}I_j(x_n(t_j))\tilde{x}_n(t_j)\right|\geqslant\\&\frac{1}{2}\|\tilde{x}'_n\|_2^2-c_5h^2(|\bar{x}_n|)-c_5\|\tilde{x}'\|_2\end{aligned}$$

由此可知存在 $M>0$，使得

$$\frac{1}{2}\|\tilde{x}'_n\|_2^2\leqslant c_5h^2(|\bar{x}_n|)+M\tag{16}$$

类似可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}[F(t,x_n)-F(t,\bar{x}_n)]\mathrm{d}t\right|=&\left|\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(t,\bar{x}_n+s\tilde{x}_n)\tilde{x}_n\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right|\leqslant\\&\frac{1}{4}\|\tilde{x}'\|_2^2+c'_3\|\tilde{x}'\|_2+c'_3h^2(|\bar{x}_n|)\end{aligned}\tag{17}$$

和

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{x_n}I_j(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant&\left|\int_0^{\bar{x}_n}I_j(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{\bar{x}_n}^{\bar{x}_n+\tilde{x}_n}I_j(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\int_0^{|\bar{x}_n|}(ah(s)+b)\mathrm{d}s+\left|\int_{\bar{x}_n}^{\bar{x}_n+\tilde{x}_n}I_j(s)\mathrm{d}s\right|=\\&aH(|\bar{x}_n|)+b|\bar{x}_n|+|I_j(\zeta)\tilde{x}_n|\leqslant\\&aH(|\bar{x}_n|)+b|\bar{x}_n|+\frac{1}{4}\|\tilde{x}'\|_2^2+c_4\|\tilde{x}'\|_2+c_4h^2(|\bar{x}_n|)\end{aligned}\tag{18}$$

其中 ζ 位于 $\bar{x}_n$ 与 $\bar{x}_n+\tilde{x}_n$ 之间. 因此，由(16),(17),(18) 式可知存在 $c_6>0$ 使得

$$\varphi(x_n)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|x'_n(t)|^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}F(t,x_n)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}\int_0^{x_n(t_j)}I_j(t)\mathrm{d}t=$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\widetilde{x}'_n\|_2^2-\int_0^{2\pi}[F(t,x_n)-F(t,\overline{x}_n)]\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}F(t,\overline{x}_n)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}\int_0^{x_n(t_j)}I_j(t)\mathrm{d}t\leqslant\\
&c_6h^2(|\overline{x}_n|)+apH(|\overline{x}_n|)+bp|\overline{x}_n|+c_6-\int_0^{2\pi}F(t,\overline{x}_n)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{19}
$$

由(19)式可知$\{|\overline{x}_n|\}$是有界的. 实际上，如果$\{|\overline{x}_n|\}$无界，不妨假设

$$|\overline{x}_n|\to+\infty,\ n\to\infty$$

则由命题 A 和条件(10)可知，当$|\overline{x}_n|\to+\infty$，$n\to\infty$时，

$$\varphi(x_n)\leqslant H(|\overline{x}_n|)\left[c_6\frac{h^2(|\overline{x}_n|)}{H(|\overline{x}_n|)}+ap+c_6\frac{1}{H(|\overline{x}_n|)}-\frac{\int_0^{2\pi}F(t,\overline{x}_n)\mathrm{d}t-bp|\overline{x}_n|}{H(|\overline{x}_n|)}\right]\to-\infty$$

这与$\{\varphi(x_n)\}$有界矛盾. 因此$\{|\overline{x}_n|\}$有界. 接下来利用标准分析过程[7]就可以完成证明.

定理 2 的证明 令$\widetilde{H}_{2\pi}^1=\{x\in H_{2\pi}^1\mid\overline{x}=0\}$. 则$H_{2\pi}^1=\mathbb{R}\oplus\widetilde{H}_{2\pi}^1$.

当$x\in\mathbb{R}$，由(9)式可知，当$|x|$充分大则

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)=&-\int_0^{2\pi}F(t,x)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}\int_0^{x(t_j)}I_j(t)\mathrm{d}t\leqslant\\
&-\int_0^{2\pi}F(t,x)\mathrm{d}t+apH(|x|)+bp|x|=\\
&-H(|x|)\left(\frac{\int_0^{2\pi}F(t,x)\mathrm{d}t-bp|x|}{H(|x|)}-ap\right)
\end{aligned}
$$

因此由(10)式及命题 A 中 3)可得

$$\lim_{x\in\mathbb{R},|x|\to+\infty}\varphi(x)=-\infty \tag{20}$$

另一方面，当$x\in\widetilde{H}_{2\pi}^1$，采用与得出(14)和(17)式类似的过程，可知存在正常数c_7使得

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x'^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}F(t,x)\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}\int_0^{x(t_j)}I_j(t)\mathrm{d}t=\\
&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x'^2\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\int_0^1f(t,sx)x\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{p}\int_0^{x(t_j)}I_j(t)\mathrm{d}t\geqslant\\
&\frac{1}{4}\|x'\|_2^2-c_7\|x'\|_2-c_7
\end{aligned}
$$

于是当$\|x\|\to\infty$时，

$$\varphi(x)\to+\infty \tag{21}$$

由(20),(21)式以及鞍点定理[4]可知φ存在临界点$x\in H_{2\pi}^1$. 因此(1),(2),(3)式至少有一个2π周期解.

参考文献:

[1] CARTER T E. Optimal Impulsive Space Trajectories Based on Linear Equations [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1991, 70(2): 277-297.

[2] CARTER T E. Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Impulsive Rendezvous with Linear Equations of Motion [J]. Dynamics and Control, 2000, 10(3): 219-227.

[3] ZHOU J W, Li Y K. Existence and Multiplicity of Solutions for Some Dirichlet Problems with Impulsive Effects [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(7-8): 2856-2865.

[4] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[5] TANG C L. Periodic Solutions for Nonautonomous Second Order Systems with Sublinear Nonlinearity [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(11): 3263-3270.

[6] TANG C L, WU X P. Subharmonic Solutions for Nonautonomous Sublinear Second Order Hamiltonian Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 304(1): 383-393.

[7] DING W, QIAN D B. Periodic Solutions for Sublinear Systems via Variational Approach [J]. Nonlinear Analysis: Real

World Applications，2010，11(4)：2603－2609.

[8] RABINOWITZ P. On Subharmonic Solutions of Hamiltonian Systems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics，2010 ，31 (2) ：157－184.

[9] FONDA A，LAZER A C. Subharmonic Solutions of Conservative Systems with Nonconvex Potentials [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1992，115(1)：183－190.

[10] JIANG Q，TANG C L. Periodic and Subharmonic Solutions of a Class of Subquadratic Second－Order Hamiltonian Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2007，328(1)：380－389.

[11] WANG Z，ZHANG J. Periodic Solutions for Nonautonomous Second Order Hamiltonian Systems with Sublinear Nonlinearity [J]. Boundary Value Problems，2011，2011(1)：1－14.

[12] NIETO J J，O'REGAN D. Variational Approach to Impulsive Differential Equations [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2009，10(2)：680－690.

Periodic Solutions of Generalized Sublinear Impulsive Hamiltonian Systems

JIANG Li-xin[1]，　DING　Wei[2]

1. *Department Mathematics and Physics，Nantong Normal College，Nantong Jiangsu 226006，China*；

2. *School of Sciences，Nantong University，Nantong Jiangsu 226007，China*

Abstract：Under sublinear conditions，the periodic solutions of impulsive Hamiltonian systems

$$x'' + f(t,\ x) = 0,\ \text{a. e.}\ t \in [0,\ 2\pi]$$

$$\Delta x'(t_j) := x'(t_j^+) - x'(t_j^-) = I_j(x(t_j)) \qquad j = 1,2,\cdots,p$$

have been studied extensively. Here Sublinearity is reflected in controlled function of $f(t,\ x)$：

$$|\ f(t,\ x)\ | \leqslant g(t)\ |\ x\ |^{\alpha} + h(t)$$

where $g, h \in L^1(0, 2\pi; \mathbb{R}^+)$，$\alpha \in [0,\ 1)$. In this paper，we weaken sublinear conditions and prove the existence of periodic solutions for impulsive Hamiltonian systems if $f(t,\ x)$ belongs to some function set by critical point theory. This generalizes known results.

Key words：impulsive Hamiltonian systems；periodic solutions；sublinear；critical points；saddle point theorem

责任编辑　张　栒