DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.11.005

改进的分数阶辅助方程方法及其在非线性空间-时间分数阶微分方程中的应用①

赵梅妹

西安翻译学院 基础科学系,西安 710105

摘要: 利用改进的分数阶辅助方程方法求解具有修正的 Riemann-Liouville 分数阶导数的非线性发展方程组. 将该方法应用到空间-时间分数阶 Broer-Kaup 方程组和空间-时间分数阶长水波近似方程组,并通过符号计算得到这两类方程组的精确行波解. 结果表明,该方法能十分有效和便捷地得到时间-空间分数阶非线性微分方程组的解.

关　键　词: 改进的分数阶辅助方程方法;修正的 Riemann-Liouville 分数阶导数;分数阶微分方程;Broer-Kaup 方程组;长水波近似方程组

中图分类号:O175　　**文献标志码:A**　　**文章编号:** 1000-5471(2018)11-0024-06

近些年来,分数阶微分方程(FDEs)已经广泛应用于各个研究领域[1-16]. 文献[17]指出,寻找分数阶微分方程的精确解析解是一项比较困难的研究任务. 文献[18]提出了一种新的分数阶微分方程的求解方法,即构造分数阶微分方程的显式精确解. 这是一种基于齐次平衡原理[19]、改进的 Riemann-Liouville 导数[20-21] 以及符号计算的直接方法.

在本文中,我们将利用改进的分数阶辅助方程方法[22] 求解流体力学中的两个空间-时间分数阶微分方程:

(Ⅰ)空间-时间分数阶 Broer-Kaup 方程组[23]:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u + u D_x^{\alpha} u + D_x^{\alpha} v = 0 \\ D_t^{\alpha} v + D_x^{\alpha} u + D_x^{\alpha}(uv) + D_x^{3\alpha} u = 0 \end{cases} \tag{1}$$

这个方程描述了当存在色散和非线性影响的时候,在充满弹性的液体或粘弹性的介质中波的传播. x 为空间变量,t 为时间变量. $u = u(x, t)$ 表示波的水平速度,$v = v(x, t)$ 表示与平衡位置的高度偏差.

(Ⅱ)空间-时间分数阶长水波近似方程组[24-26]:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} u - u D_x^{\alpha} u - D_x^{\alpha} v + \beta D_x^{2\alpha} u = 0 \\ D_t^{\alpha} v - D_x^{\alpha}(uv) - \beta D_x^{2\alpha} v = 0 \end{cases} \tag{2}$$

此方程组是浅水长波双向传播的模型.

1　改进的分数阶辅助方程方法

修正的 Riemann-Liouville 导数[27] 定义如下:

① 收稿日期:2017-02-23
作者简介:赵梅妹(1982-),女,讲师,硕士,主要从事数学物理方程研究.

$$D_t^\alpha f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_0^t(t-\xi)^{-\alpha}(f(\xi)-f(0))\mathrm{d}\xi & 0<\alpha<1\\ (f^{(n)}(t))^{(\alpha-n)} & n\leqslant\alpha<n+1,\ n\geqslant 1\end{cases}\tag{3}$$

关于修正的 Riemann-Liouville 导数[27] 的一些性质列举如下：

$$D_t^\alpha t^\delta=\frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta-\alpha)}t^{\delta-\alpha},\ \delta>0\tag{4}$$

$$D_t^\alpha(f(t)g(t))=g(t)D_t^\alpha f(t)+f(t)D_t^\alpha g(t)\tag{5}$$

$$D_t^\alpha f[g(t)]=f'_g[g(t)]D_t^\alpha g(t)=D_g^t f[g(t)](g'(t))^\alpha\tag{6}$$

上述性质在后面的分数阶微分方程求解中起着重要的作用.

给定如下的非线性分数阶微分方程，

$$P(u,\ u_t,\ u_x,\ D_t^\alpha u,\ D_x^\alpha u,\ \cdots)=0,\ 0<\alpha\leqslant 1\tag{7}$$

其中：x 和 t 是两个独立的变量，$D_t^\alpha u$ 和 $D_x^\alpha u$ 是 u 的修正的 Riemann-Liouville 导数，$u=u(x,t)$ 是一个未知函数，P 是关于 $u=u(x,t)$ 的多项式及其偏导数的多项式，P 含有高阶导数和非线性项.

为了得到 u 的精确解，采取以下 4 步：

1）作行波变换：

$$u(x,\ t)=u(\xi),\ \xi=x+ct\tag{8}$$

其中 c 是待定系数. 将(8)式代入(7)式，则非线性分数阶微分方程(7)转化成下面的关于 $u=u(\xi)$ 的分数阶常微分方程：

$$P(u,\ cu',\ u',\ c^\alpha D_\xi{}^\alpha u,\ D_\xi{}^\alpha u,\ \cdots)=0\tag{9}$$

2）设方程(9)具有以下解：

$$u(\xi)=\sum_{i=-n}^{-1}a_i\varphi^i+a_0+\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi^i\tag{10}$$

其中 $a_i(i=-n,-n+1,\cdots,n-1,n)$ 是待定系数，正整数 n 通过平衡方程(9)的最高阶导数和非线性项确定[27]. $\varphi=\varphi(\xi)$ 满足下列分数阶 Riccati 方程：

$$D_\xi^\alpha\varphi(\xi)=\sigma+\varphi^2(\xi)\tag{11}$$

其中 σ 为常数. 分数阶 Riccati 方程(11)有以下解[28]：

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}-\sqrt{-\sigma}\tanh(\sqrt{-\sigma}\xi,\ \alpha),\ \sigma<0\\ -\sqrt{-\sigma}\coth(-\sqrt{-\sigma}\xi,\ \alpha),\ \sigma<0\\ \sqrt{-\sigma}\tan(\sqrt{\sigma}\xi,\ \alpha),\ \sigma>0\\ -\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}\xi,\ \alpha),\ \sigma>0\\ -\dfrac{\Gamma(1+\alpha)}{\xi^\alpha+\omega},\ \sigma=0\end{cases}\tag{12}$$

其中 ω 是常数，广义双曲和三角函数定义如下：

$$\cosh(z,\ \alpha)=\frac{E_\alpha(z)+E_\alpha(-z)}{2}\qquad \sinh(z,\ \alpha)=\frac{E_\alpha(z)-E_\alpha(-z)}{2}$$

$$\cos(z,\ \alpha)=\frac{E_\alpha(iz)+E_\alpha(-iz)}{2}\qquad \sin(z,\ \alpha)=\frac{E_\alpha(iz)-E_\alpha(-iz)}{2i}$$

$$\tanh(z,\ \alpha)=\frac{\sinh(z,\ \alpha)}{\cosh(z,\ \alpha)}\qquad \coth(z,\ \alpha)=\frac{\cosh(z,\ \alpha)}{\sinh(z,\ \alpha)}$$

$$\tan(z,\ \alpha)=\frac{\sin(z,\ \alpha)}{\cos(z,\ \alpha)}\qquad \cot(z,\ \alpha)=\frac{\cos(z,\ \alpha)}{\sin(z,\ \alpha)}$$

其中 $E_\alpha(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}(\alpha>0)$ 是含有一个参数的 Mittag-Leffler 函数.

3) 将方程(11)及(10)代入方程(9),并且利用修正的Riemann-Liouville导数(6)-(8)的性质,可以得到一个关于 $\varphi(\xi)$ 的多项式. 令 $\varphi^k(k=0,1,2,\cdots,-1,-2,\cdots)$ 的所有系数为零,从而得到一些关于 $c,a_i(i=-n,-n+1,\cdots,n-1,n)$ 的超定非线性代数方程组.

4) 假设通过解代数方程组可以得到常数 c,$a_i(i=-n,-n+1,\cdots,n-1,n)$,将这些常数和方程(11)的解代入到(10)式,可以得到方程(7)的精确解.

2 应用举例

应用改进的分数阶辅助方程方法求解方程组(1)及(2).

2.1 分数阶 Broer-Kaup 方程组

利用行波变量 $u=u(\xi)$,$v=v(\xi)$,$\xi=x+ct$,方程(1)可以化简为以下非线性分数阶常微分方程:

$$\begin{cases} c^\alpha D_\xi^\alpha u + uD_\xi^\alpha u + D_\xi^\alpha v = 0 \\ c^\alpha D_\xi^\alpha v + D_\xi^\alpha u + D_\xi^\alpha (uv) + D_\xi^{3\alpha} u = 0 \end{cases} \tag{13}$$

平衡方程(13)中的最高阶导数项和非线性项,并结合(10)式可知方程(13)有以下形式的解:

$$\begin{cases} u(\xi) = a_0 + a_1\varphi(\xi) + \dfrac{a_2}{\varphi(\xi)} \\ v(\xi) = b_0 + b_1\varphi(\xi) + b_2\varphi^2(\xi) + \dfrac{b_3}{\varphi(\xi)} + \dfrac{b_4}{\varphi^2(\xi)} \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\varphi(\xi)$ 满足方程(11).

将方程(14)及方程(11)代入方程(13),合并 $\varphi(\xi)$ 的相同幂次项,方程(13)的左端是一个关于 $\varphi(\xi)$ 的多项式. 令该多项式的 $\varphi(\xi)$ 各阶幂次的系数为零,导出一组关于 $c,a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,b_3,b_4$ 的代数方程. 然后利用 Maple 或 Mathematica 求解代数方程组有两种情形:

1) $a_0=-c^\alpha$,$a_1=0$,$a_2=2\sigma$,$b_0=-2\sigma-1$,$b_1=b_2=b_3=0$,$b_4=-2\sigma^2$,其中 c 为任意常数.

2) $a_0=-c^\alpha$,$a_1=2$,$a_2=-2\sigma$,$b_1=b_3=0$,$b_0=-4\sigma-1$,$b_2=-2$,$b_4=-2\sigma^2$,其中 c 为任意常数.

利用情形1)中的方程(14)和方程(11)的解可以得到非线性分数阶微分方程(1)的下列精确解:

$$\begin{cases} u_1 = -c^\alpha - 2\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}\xi, \alpha) \\ v_1 = -2\sigma - 1 - 2\sigma\coth^2(\sqrt{-\sigma}\xi, \alpha) \end{cases}$$

其中 $\sigma<0$,$\xi=x+ct$;

$$\begin{cases} u_2 = -c^\alpha - 2\sqrt{-\sigma}\tanh(\sqrt{-\sigma}\xi, \alpha) \\ v_2 = -2\sigma - 1 - 2\sigma\tanh^2(\sqrt{-\sigma}\xi, \alpha), \end{cases}$$

其中 $\sigma<0$,$\xi=x+ct$;

$$\begin{cases} u_3 = -c^\alpha + 2\sqrt{\sigma}\cot(\sqrt{\sigma}\xi, \alpha) \\ v_3 = -2\sigma - 1 - 2\sigma\cot^2(\sqrt{\sigma}\xi, \alpha) \end{cases}$$

其中 $\sigma>0$,$\xi=x+ct$;

$$\begin{cases} u_4 = -c^\alpha - 2\sqrt{\sigma}\tan(\sqrt{\sigma}\xi, \alpha) \\ v_4 = -2\sigma - 1 - 2\sigma\tan^2(\sqrt{\sigma}\xi, \alpha) \end{cases}$$

其中 $\sigma>0$,$\xi=x+ct$;

$$\begin{cases} u_5 = -c^\alpha - \dfrac{2\sigma(\xi^\alpha+\omega)}{\Gamma(1+\alpha)} \\ v_5 = -2\sigma - 1 - 2\sigma^2\,\dfrac{(\xi^\alpha+\omega)^2}{\Gamma^2(1+\alpha)} \end{cases}$$

其中 $\sigma>0$,$\xi=x+ct$,w 是常数.

利用情形 2）可以得到方程(1) 更多的解，这里就不再列出.

2.2　分数阶长水波近似方程组

通过行波变换 $u=u(\xi)$，$v=v(\xi)$，$w=w(\xi)$，$\xi=x+ct$，可以将方程(2) 化简为以下分数阶常微分方程：

$$\begin{cases} c^{\alpha}D_{\xi}^{\alpha}u-uD_{\xi}^{\alpha}u-D_{\xi}^{\alpha}v+\beta D_{\xi}^{2\alpha}u=0 \\ c^{\alpha}D_{\xi}^{\alpha}v-D_{\xi}^{\alpha}(uv)-\beta D_{\xi}^{2\alpha}v=0 \end{cases} \tag{15}$$

平衡方程(15) 中最高阶导数项和非线性项，并结合(10) 式可知方程(15) 有以下形式的解：

$$\begin{cases} u(\xi)=a_0+a_1\varphi(\xi)+\dfrac{a_2}{\varphi(\xi)} \\ v(\xi)=b_0+b_1\varphi(\xi)+b_2\varphi^2(\xi)+\dfrac{b_3}{\varphi(\xi)}+\dfrac{b_4}{\varphi^2(\xi)} \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\varphi(\xi)$ 满足方程(11).

将方程(16) 及方程(11) 代入方程(15)，合并 $\varphi(\xi)$ 的相同幂次项，方程(15) 的左端是一个关于 $\varphi(\xi)$ 的多项式. 令该多项式的 $\varphi(\xi)$ 各阶幂次的系数为零，导出一组关于 $c,a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,b_3,b_4$ 的代数方程. 然后利用 Maple 或 Mathematica 求解代数方程组有：

1）$a_0=c^{\alpha}$，$a_1=0$，$a_2=2\beta\sigma$，$b_0=-4\beta^2\sigma$，$b_1=b_2=b_3=0$，$b_4=-4\beta^2\sigma^2$，其中 c 是任意常数.

2）$a_0=c^{\alpha}$，$a_1=-2\beta$，$a_2=2\beta\sigma$，$b_0=-8\beta^2\sigma$，$b_1=b_3=0$，$b_2=-4\beta^2$，$b_4=-4\beta^2\sigma^2$，其中 c 是任意常数.

利用情形 1）中(16) 式及方程(11) 的解可以获得 FDEs(2) 的以下精确解：

$$\begin{cases} u_1=c^{\alpha}-2\beta\sqrt{-\sigma}\coth(\sqrt{-\sigma}\xi,\alpha) \\ v_1=-4\beta^2\sigma-4\beta^2\sigma\coth^2(\sqrt{-\sigma}\xi,\alpha) \end{cases}$$

其中 $\sigma<0$，$\xi=x+ct$；

$$\begin{cases} u_2=c^{\alpha}-2\beta\sqrt{\sigma}\tan(\sqrt{\sigma}\xi,\alpha) \\ v_2=-4\beta^2\sigma-4\beta^2\sigma\tan^2(\sqrt{\sigma}\xi,\alpha) \end{cases}$$

其中 $\sigma>0$，$\xi=x+ct$；

$$\begin{cases} u_3=c^{\alpha}-\dfrac{2\beta\sigma(\xi^{\alpha}+\omega)}{\Gamma(1+\alpha)} \\ v_3=-4\beta^2\sigma-4\beta^2\sigma^2\dfrac{(\xi^{\alpha}+\omega)^2}{\Gamma^2(1+\alpha)} \end{cases}$$

其中 $\sigma=0$，$\xi=x+ct$，w 是常数.

利用情形 2）可以得到方程(2) 的其他精确解.

3　结　　论

本文利用改进的分数阶辅助方程方法构造了空间-时间分数阶 Broer-Kaup 方程组和空间－时间分数阶近似长水波方程组的 3 种类型的行波解，这些解包括广义双曲函数解、广义三角函数解和有理函数解. 这些行波解将有助于更深入了解非线性波动现象的物理机理. 该方法的核心思想是按照 $\varphi^i(\xi)$ 项构造分数阶微分方程的精确解，从而将分数阶微分方程转化为非线性代数方程组. 因此，分数阶微分方程的精确解能够通过符号计算进行构造.

参考文献：

[1]　GAZIZOV R K，IBRAGIMOV N H，LUKASHCHUK S Y. Nonlinear Self-Adjointness Conservation Laws and Exact Solutions of Time-Fractional Kompaneets Equations [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2015，23(1－3)：153－163.

[2] WEST B J. Exact Solution to Fractional Logistic Equation [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2015, 429: 103-108.

[3] GUPTA A K, SAHA RAY S. Numerical Treatment for the Solution of Fractional Fifth-Order Sawada-Kotera Equation Using Second Kind Chebyshev Wavelet Method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(17): 5121-5130.

[4] ODIBAT Z, MOMANI S. The Variational Iteration Method: An Efficient Scheme for Handling Fractional Partial Differential Equations in Fluid Mechanics [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58 (11-12): 2199-2208.

[5] KOLWANKAR K M, GANGAL A D. Fractional Differentiability of Nowhere Differentiable Functions and Dimensions [J]. Chaos, 1996, 6(4): 505-513.

[6] KOLWANKAR K M, GANGAL A D. Holder Exponents of Irregular Signals and Local Fractional Derivatives [J]. Pramana-Journal of Physics, 1997, 48(1): 49-68.

[7] KOLWANKAR K M, GANGAL A D. Local Fractional Fokker-Planck Equation [J]. Physical Review Letters, 1998, 80: 214-217.

[8] CHEN Y, YAN Y, ZHANG K W. On the Local Fractional Derivative [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 362(1): 17-33.

[9] WU G C. A Fractional Variational Iteration Method for Solving Fractional Nonlinear Differential Equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(8): 2186-2190.

[10] SUN H G, CHEN W. Fractal Derivative Multi-Scale Model of Fluid Particle Transverse Accelerations in Fully Developed Turbulence [J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2009, 52(3): 680-683.

[11] CHEN W, SUN H G. Multiscale Statistical Model of Fully-Developed Turbulence Particle Accelerations [J]. Modern Physics Letters B, 2009, 23(3): 449-452.

[12] CRESSON J. Scale Calculus and the Schrodinger Equation [J]. Journal of Mathematical Physics, 2003, 44(11): 4907-4938.

[13] ADDA F B, CRESSON J. About Non-Differentiable Functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 263: 721-737.

[14] BIALA T A, JATOR S N. Block Implicit Adams Methods for Fractional Differential Equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals , 2015, 81: 365-377.

[15] KOLK M, PEDAS A, TAMME E. Modified Spline Collocation for Linear Fractional Differential Equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 283: 28-40.

[16] JUMARIE G. Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51(9-10): 1367-1376.

[17] El-SAYED A M A, RIDA S Z, ARAFA A A M. Exact Solutions of Fractional-Order Biological Population Model [J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 52(12): 992-996.

[18] ZHANG S, ZHANG H Q. Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to Nonlinear Fractional PDEs [J]. Physics Letters A, 2011, 375(7): 1069-1073.

[19] WANG M. Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations [J]. Physics Letters A, 1995, 199(3-4): 169-172.

[20] JUMARIE G. Fractional Partial Differential Equations and Modified Riemann-Liouville Derivative New Methods for Solution [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2007, 24(1): 31-48.

[21] JUMARIE G. Cauchy's Integral Formula via The Modified Riemann-Liouville Derivative for Analytic Functions of Fractional Order [J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(12): 1444-1450.

[22] GUO S M, Mei L Q, Li Y, et al. The Improved Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Fluid Mechanics [J]. Physics Letters A, 2012, 376(4): 407-411.

[23] KAUP D J. A Higher-Order Water-Wave Equation and the Method for Solving It [J]. Progress of Theoretical Physics, l975, 54(2): 396-408.

[24] WHITHAM G B. Variational Methods and Applications to Water Waves [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physicaland Engineering Sciences, 1967, 299(1456): 6—25.

[25] BROER L J F. Approximate Equations for Long Water Waves [J]. Applied Scientific Research, 1975, 31(5): 377—395.

[26] KUPERSHMIDT B A. Mathematics of Dispersive Water Waves [J]. Communications in Mathematical Physics, 1985, 99(1): 51—73.

[27] ZHOU Y B, WANG M L, WAN Y M. Periodic Wave Solutions to a Coupled KdV Equations with Variable Coefficients [J]. Physics Letters A, 2003, 308(1): 31—36.

[28] ZHANG S, ZONG Q A, LIU D, et al. A Generalized Exp-Function Method for Fractional Riccati Differential Equations [J]. Communications in Fractional Calculus, 2010, 1(1): 48—51.

On Improved Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to Nonlinear Space-Time Fractional Equations

ZHAO Mei-mei

Basic Science Department, Engineering and Technology School, Xi'an Fanyi University, Xi'an, 710105, China

Abstract: An improved fractional sub-equation method is applied to solve nonlinear evolution equations involving Jumarie's modified Riemann-Liouville derivative. In this method, the space-time fractional Broer-Kaup and the approximate long water wave equations are considered and exact traveling wave solutions are explicitly obtained with the aid of symbolic computation. As a result, the obtained solutions show that the proposed method is very effective and convenient.

Key words: improved fractional sub-equation method; modified Riemann-Liouville derivative; fractional differential equation; Broer-Kaup equations; approximate long water wave equations

责任编辑　张　构