

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.11.025

# 光的衍射的理论分析及 Mathematica 仿真模拟<sup>①</sup>

陈学文, 罗源源, 张家伟, 姚雪

重庆科技学院 数理学院, 重庆 401331

**摘要:** 首先利用旋转矢量从理论上推出了光的多缝干涉的光强分布公式, 并将狭缝数  $N \rightarrow \infty$ , 从而得到光的单缝衍射光强分布, 进而在多缝干涉和单缝衍射的基础上得到了光栅衍射光强分布. 此外, 将 Mathematica 仿真模拟应用到光的衍射课堂教学中. 基于 Mathematica 软件的交互功能, 利用 Mathematica 的 Manipulate 命令对单缝夫琅禾费衍射和光栅衍射做了仿真模拟, 获得了相应的可以调节各参数(如波长、狭缝宽度、光栅常数等)的动态图形. 这对学生建立清晰的物理图像, 更好地理解光的衍射的物理规律有很好的促进作用.

**关键词:** 光的衍射; 旋转矢量; Mathematica; 虚拟仿真

**中图分类号:** O436.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-5471(2018)11-0156-06

光的衍射是大学物理课程中十分重要的知识. 然而, 由于光的衍射涉及到知识点多且物理图像抽象, 以及工科大学物理学时的限制, 目前大多数大学物理课程中关于单缝夫琅禾费衍射条纹分布, 一般采用菲涅尔半波带法定性讨论, 对衍射光强的分布, 一般只给出光强分布公式  $I = I_0 \sin^2 \beta / \beta^2$  而不做具体推导; 在讨论光栅衍射时, 也仅仅讨论主明条纹产生条件(光栅方程), 并以文字的形式说明两条主明纹之间有  $N - 1$  条暗条纹和  $N - 2$  条次级明纹, 当主明纹级次为  $d/b$  的整数倍时, 会出现缺级现象. 在实际教学中, 学生普遍感到内容分散且抽象, 公式多且容易混淆, 加上光所描述的物理现象和过程很难在正常条件下呈现, 学生只有凭想象去理解, 难以形成清晰的物理图像, 从而导致课堂教学效果不甚理想. 因此, 若能采用一种简洁明了的方法推导出光强分布, 并用一种形象直观的方法动态演示光的衍射条纹和光强分布, 对于学生建立物理图像、深入理解光的衍射大有帮助.

Mathematica 软件是美国 Wolfram Research 公司开发的数学软件, 具有数值计算、符号计算和图像处理的强大功能, 使用非常方便. Mathematica 具有友好的图形界面, 允许用各种图形、曲线输出计算结果, 甚至输出动画, 因此可以实现计算机的可视化. Mathematica 可以有效辅助大学物理教学<sup>[1-4]</sup>. 在 Mathematica 中通过“Manipulate”命令便可输出功能强大的互动函数, 它可以对具有符号参数的任何表达式自动创建界面来操控参数. 利用 Mathematica 对物理现象和规律模拟仿真, 可以直观、形象、动态地展示物理过程, 有利于学生对物理现象和规律的深入理解.

基于此, 本研究利用 Mathematica 强大的绘图功能, 动态模拟光的夫琅禾费衍射和光栅衍射的光强分布. 在具体讨论中, 首先利用旋转矢量叠加简要推导光的衍射光强分布公式, 进而利用 Mathematica 动态

① 收稿日期: 2017-11-16

基金项目: 重庆市教育委员会 2105 年度高等教育教学改革研究立项项目(153151); 重庆市科委基金(cstc2016jcyjA0336); 重庆科技学院重点项目培育基金(CK2015128).

作者简介: 陈学文(1982-), 男, 副教授, 博士, 主要从事理论物理和大学物理教学研究.

模拟光的衍射, 最后做相应的讨论.

## 1 光的衍射光强分布的理论推导

关于夫琅禾费衍射光强分布, 文献[5]讨论了双缝、单缝和多缝的干涉和衍射光强分布曲线的计算; 文献[6-7]利用积分法讨论了夫琅禾费单缝衍射光强分布; 文献[8]讨论了菲涅尔半波带法、振幅矢量叠加法和积分定量算法 3 种方法; 文献[9]讨论了单缝衍射条纹公式及其条纹级次; 文献[9]讨论了用半波带法讨论单缝衍射光强分布. 本研究通过对比分析发现, 利用旋转矢量法计算光的夫琅禾费单缝衍射不仅可以完整给出明暗条纹条件和光强分布, 而且学生也较为容易理解. 因此, 首先利用旋转矢量简要推出光的多缝干涉光强分布, 进而推广到光的单缝衍射和光栅衍射光强分布.

对于由  $N$  个狭缝构成的多缝干涉, 其装置见图 1. 狭缝中的光传播到  $P$  点时, 经相邻两条狭缝传播到光屏上  $P$  点的光程差为  $\Delta = d\sin\theta$ , 则相邻两束光在  $P$  点振动的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} \quad (1)$$

每个狭缝光线在光屏上某一点相干叠加, 相应的旋转矢量合成(叠加)见图 2.

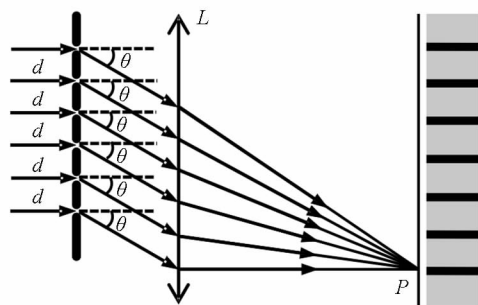


图 1 多缝干涉示意图

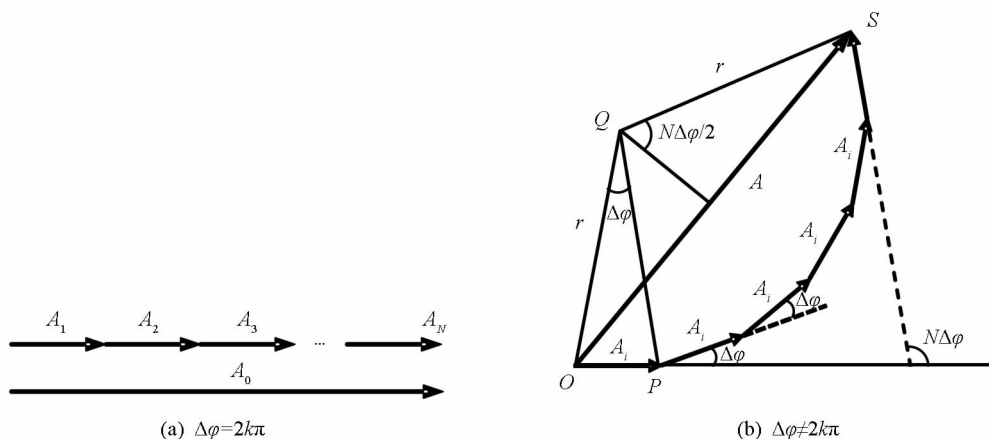


图 2 多缝干涉旋转矢量叠加

若  $\Delta\varphi = 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ , 则  $A_0 = NA_i$ , 对应着主明条纹. 若  $\Delta\varphi \neq 2k\pi$ , 根据几何关系可得, 每一个分振动的振幅为  $A_i = 2r(\sin\Delta\varphi/2)$ ,  $N$  个旋转矢量的合振幅为  $A = 2r\sin(N\Delta\varphi/2)$ . 联立消去  $r$  可得  $P$  点合振动的振幅

$$A = A_i \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} = A_0 \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{N\sin(\Delta\varphi/2)} \quad (2)$$

根据波动理论, 波的强度正比于振幅平方, 此处可简单定义  $P$  点光强为

$$I = A^2 = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{N^2 \sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad (3)$$

由(3)式可知, 当  $\sin(N\Delta\varphi/2) = 0$  而  $\sin(\Delta\varphi/2) \neq 0$  时,  $A = 0$ , 则在  $\Delta\varphi \in [0, 2\pi]$  区间内满足条件的  $\Delta\varphi$  值有  $\Delta\varphi = 2k\pi/N, k = 1, 2, \dots, N-1$ . 同理也可以得到在  $\Delta\varphi \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$  间隔为  $2\pi$  的区间内有  $N-1$  个极小值. 由此可以得出, 在两个相邻的主明条纹之间有  $N-1$  条暗条纹.

根据惠更斯-菲涅尔原理, 衍射是无数列子波叠加的结果, 因此单缝衍射可以看成是无穷多缝( $N \rightarrow \infty$ ) 干涉问题. 图 3 给出了缝宽为  $b$  的夫琅禾费单缝衍射示意图. 图 3 中凸透镜  $L$  理解为紧贴着狭缝放置, 狭缝到光屏之间的距离为透镜焦距.

在  $N \rightarrow \infty$  的情况下, 图 3 中“相邻两缝”传播到  $P$  点的光程差为  $\Delta = d' \sin\theta$ , 相应的相位差为相位差  $\Delta\varphi = 2\pi \frac{d' \sin\theta}{\lambda}$ , 且满足条件“相邻两缝”距离  $d' \rightarrow 0$ ,  $Nd' = b$ . 当衍射角  $\theta = 0$  时, 狭缝上各子光源到光屏上的距离均相等,  $O$  点为主明条纹. 当衍射角  $\theta \neq 0$  时, 根据(2) 式可得

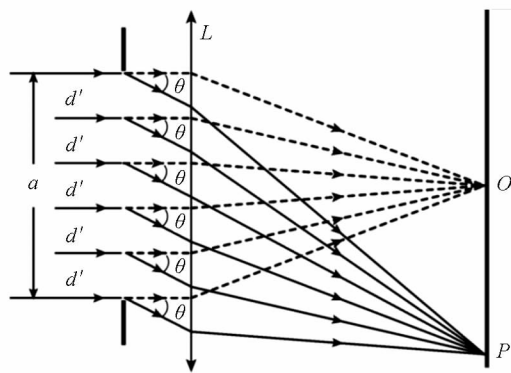


图 3 夫琅禾费单缝衍射示意图

$$A = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta\varphi \rightarrow 0}} A_0 \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi}{2}}{N \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d' \rightarrow 0}} A_0 \frac{\sin \frac{N\pi d' \sin\theta}{\lambda}}{N \sin \frac{\pi d' \sin\theta}{\lambda}} = A_0 \frac{\sin \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}} \quad (4)$$

则  $P$  点光强为

$$I = A^2 = I_0 \sin^2 \frac{\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \quad (5)$$

令衍射因子  $\beta = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}$ , 单缝夫琅禾费衍射光强分布公式表示成

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \quad (6)$$

需要说明的是, 对于(6) 式:  $\lim_{\beta \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} = \lim_{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} = 1$ ,  $\beta = 0$  是可去间断点. 而根据前面的讨论  $\beta = 0$  (即衍射角  $\theta = 0$ ) 时  $I = I_0$ , 对应着的主明纹条件, 因此可将(6) 理解为光强连续分布.

从(6) 式出发可得光的单缝衍射的分布规律: ①  $\theta = 0$  对应着主明条纹位置, 当  $-\lambda < \sin\theta < \lambda$  时为中央明条纹; ② 当  $\sin\theta = \pm 1.43\lambda, \pm 1.43\lambda, \pm 1.43\lambda, \dots$  时为各次级明条纹位置, 可近似表示成菲涅尔半波带法结果  $\sin\theta = \pm (k + 1/2)\lambda$ ; ③ 当  $\sin\theta = \pm k\lambda$  时为暗条纹位置.

光栅衍射是单缝衍射和多缝干涉的总效果, 其条纹效果是单缝衍射对多缝干涉的调制作用. 此时, 要考虑从每一个狭缝发出来的光的单缝衍射效应. 在此情况下, 将单个狭缝的光强  $I_0$  替换成(5) 式中的  $I$ , 再代入多缝干涉光强分布公式(3), 即可得到光栅衍射光强分布:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{N^2 \sin^2 \left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)} \quad (7)$$

利用旋转矢量推导光的衍射光强分布简洁直观, 无需复杂的数学计算, 并且可以将光的多缝干涉、单缝衍射和光栅衍射统一起来讨论.

## 2 光的衍射的 Mathematica 仿真模拟

在 Mathematica 中有一个简单的命令 Manipulate, 使用这个命令能创造出各种丰富的交互式应用. 计算 Manipulate 之后输出的是一个人机互动的对象, 它包含一个或多个控件(滑块等), 使用这些控件能改变一个或多个参数的数值. 这个输出它不是一个静止的结果, 而是一个能交互的运行程序. 它基本的输入命

令是 `Manipulate[expr, {{u, uint}, umin, umax}]`, 便会产生一个带有控件的 `expr` 的版本, 该控件允许  $u$  值交互式操作. 例如对多缝干涉, 在 Mathematica 中输入命令:

$$\text{Manipulate}\left[\text{plot}\left[\frac{\sin[N * \Delta\varphi/2]^2}{(N * \sin[\Delta\varphi/2])^2}, \{\Delta\varphi, -14, 14\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1\}\right], \{\{N, 10\}, 2, 20, 1\}\right]$$

便可得到如图 4 所示的交互式动态图. 其中 `Plot[]` 表示绘图,  $\{\Delta\varphi, -14, 14\}$  表示自变量  $\Delta\varphi$  的取值范围是  $[-14\text{rad}, 14\text{rad}]$ , `PlotRange`  $\rightarrow \{0, 1\}$  表示  $y$  轴范围是  $[0, 1]$ ,  $\{\{N, 10\}, 2, 20, 1\}$  表示  $N$  可以从 2 到 20 以 1 为间隔改变, 初始输入时  $N$  取 10. 通过调节杆上的按钮可以手动调节狭缝条数以观察不同情况下的图形, 也可通过 ▶ 按钮使各变量自动循环增加, 相应的动态图形会同时显示出来.

基于(7)式, 可以把夫琅禾费单缝衍射和光栅衍射光强分布和条纹分布写在同一个命令中(将(7)式中  $N$  取 1 便是夫琅禾费单缝衍射光强分布公式). 在 Mathematica 中输入如下命令:

```
Manipulate[Pane[Module[{f, f1, dp, p1, p2, text},
  f = 
$$\frac{\sin\left[\frac{\text{Pi} * b * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right]^2}{\left(\frac{\text{Pi} * b * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right)^2}$$
 * 
$$\frac{\sin\left[\frac{M * \text{Pi} * d * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right]^2}{M^2 * \sin\left[\left(\frac{\text{Pi} * d * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right)\right]^2}; f1 = \frac{\sin\left[\frac{\text{Pi} * b * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right]^2}{\left(\frac{\text{Pi} * b * 10^{-3} * \sin\left[\frac{\pi}{180} X\right]}{(\lambda * 10^{-9})}\right)^2};
  dp = DensityPlot[f, {X, -\theta, \theta}, {Y, 0, 1}, PlotPoints -> 40, PlotRange -> All, ImagePadding -> 20,
    ImageSize -> {400, 280}, Frame -> True, AspectRatio -> 1 / 1.5, ColorFunction -> "GrayTones"];
  p1 = Plot[f, {X, -\theta, \theta}, PlotPoints -> 20, PlotRange -> All, ImageSize -> {400, 280},
    ImagePadding -> 20, Frame -> True, PlotStyle -> {Red, Thick}, AspectRatio -> 1 / 1.5];
  p2 = Plot[f1, {X, -\theta, \theta}, PlotPoints -> 20, PlotRange -> All, ImageSize -> {400, 280},
    ImagePadding -> 20, Frame -> True, PlotStyle -> {Dashed, Blue, Thick}, AspectRatio -> 1 / 1.5];
  text = Row[{"衍射角 \theta / \text{\textcircled{0}}"];
  Text@Switch[a, 1, Labeled[dp, {text, Rotate["\n衍射图样分布", Pi / 2]}, All],
    2, Labeled[Show[p1, p2], {text, Rotate["\n相对光强分布", Pi / 2]}, All],
    3, Labeled[Show[dp, p1], {text, Rotate["\n衍射图样&相对光强分布", Pi / 2]}, All]]],
  Alignment -> Center], "",
  Row[{Control@{{\theta, 45, "衍射角 \theta / \text{\textcircled{0}}"}, 0.2, 90, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
    Control@{{d, 0.003, "光栅常数 d/mm"}, 0.002, 0.04, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
    Control@{{b, 0.001, "狭缝宽度 b/mm"}, 0.001, 0.01, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
    Control@{{M, 13, "狭缝条数 N"}, 1, 200, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small},
    Control@{{\lambda, 491, "波长 \lambda/nm"}, 450, 750, 1, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Small}}],
  Row[{
    Control@{{a, 1, "绘图"}, {1 -> "衍射条纹", 2 -> "相对光强", 3 -> "衍射条纹&相对光强"},
    ControlType -> PopupMenu}], TrackedSymbols -> {\theta, b, \lambda, d, a, M}]$$

```

便可得到相应的交互式动态图(图 5 和图 6), 图中衍射角  $\theta$ 、光栅常数  $d$ 、狭缝宽度  $b$ 、狭缝条数  $N$  和光波波长  $\lambda$  均可以改变, 它们的取值范围可以在程序中任意设置. 如程序中设定  $\theta$  从  $0.2^\circ$  到  $90^\circ$  变化,  $d$  从  $0.002 \text{ mm}$  到  $0.04 \text{ mm}$  变化,  $b$  从  $0.001 \text{ mm}$  到  $0.01 \text{ mm}$  变化(在输入时保证  $b$  小于  $d$ ),  $\lambda$  从  $450 \text{ nm}$  到  $750 \text{ nm}$  变化,  $N$  从 1 条到 200 条变化, 图形类型可以显示 3 种方式. 图 5 给出的是单缝衍射“衍射条纹”和“相对光强”图形, 图 6 分别给出了光栅衍射“相对光强”和“衍射条纹”图形, 通过调节杆上的按钮可以手动调节各以观察不同情况下的图形, 也可通过 ▶ 按键使各变量自动循环增加, 相应的动态图形会同时显示出来.

利用 Mathematica 软件对光的衍射进行了虚拟仿真, 相对于其他软件, Mathematica 公式和命令输入直观, 对输入格式要求低, 只需要简单的命令便可实现仿真图像, 更具操作优势.

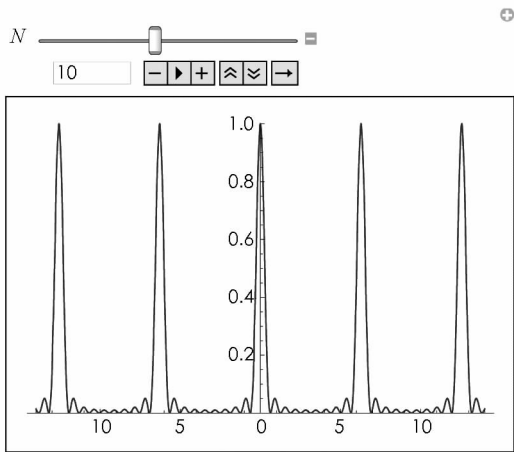


图 4 多缝干涉 Mathematica 仿真模拟

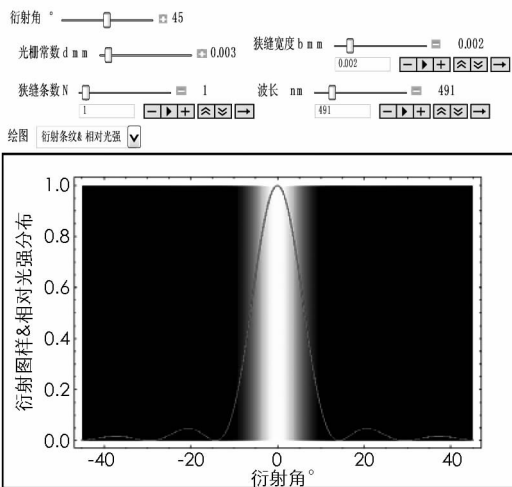


图 5 单缝衍射的 Mathematica 仿真模拟

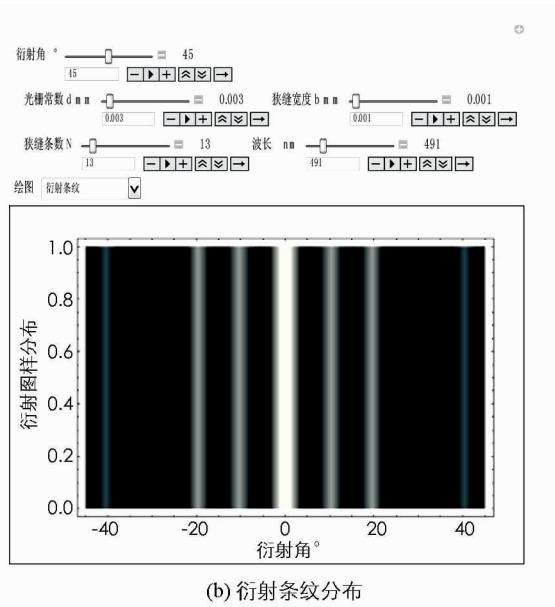
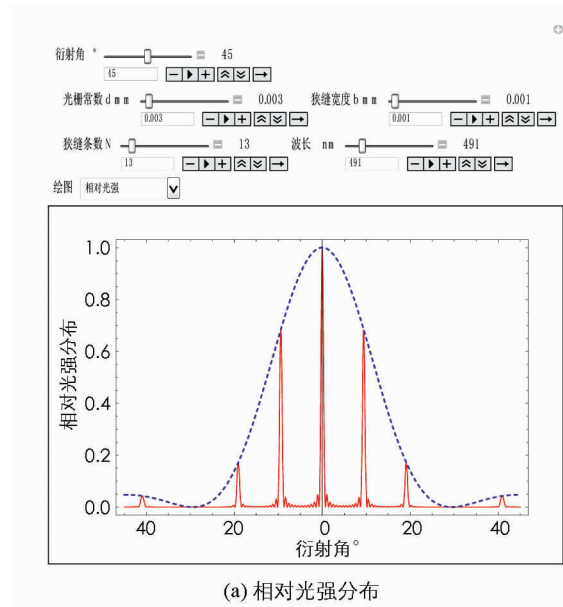


图 6 光栅衍射的 Mathematica 仿真模拟

### 3 结 论

首先利用旋转矢量给出了光的衍射光强分布. 利用旋转矢量叠加可以简洁地推导出光的多缝干涉和单缝衍射光强分布. 一方面可使学生清楚理解光的衍射光强分布的由来, 理解光强分布特点. 另一方面可以引导学生总结出光的干涉和衍射这 2 个概念的区别与联系: 从本质上来说, 干涉和衍射都是光波相干叠加的结果, 这是两者之间的共性; 两者之间的主要差别在于干涉在有限数量的光束之间由于光程差的变化而形成叠加效应, 衍射是光波在传播中由于波阵面受到限制, 光的传播偏离了原来直线传播的方向, 使无穷多个次波之间产生了光程差而形成叠加效应.

本文还利用 Mathematica 软件对光的衍射进行了虚拟仿真, 将抽象的光的衍射现象形象直观地动态演示出来, 这对于光的衍射深入理解很有帮助. 由于光的衍射现象在正常条件下很难展示出来, 计算机模拟显得很有必要. 实际上, 在大学物理中很多物理过程都可以通过 Mathematica 实现虚拟仿真, 例如虚拟仿真迈克耳孙干涉仪、牛顿环以及光的圆孔衍射和矩形孔衍射, 虚拟仿真各种带电体的电场强度和电势分布

等等. 因此, 从充分利用 Mathematica 的仿真模拟功能, 对于形象展示物理图像, 帮助学生理解物理过程, 从而提高大学物理教学效果.

#### 参考文献:

- [1] 路洪艳, 从守民, 刘保通, 等. Mathematica 在大学物理教学中的应用 [J]. 淮北煤炭师范学院学报(自然科学版), 2010, 31(4): 83-86.
- [2] 于凤梅, 王克强, 张麟. 运用 Mathematica 软件辅助大学物理教学 [J]. 中国现代教育装备, 2011(15): 29-31.
- [3] 马军. Mathematica 交互功能在物理教学中的应用 [J]. 中国现代教育装备, 2011(21): 17-19.
- [4] 江俊勤. 基于 Mathematica 的数字化物理学 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [5] 沈犁理, 钟寿仙, 胥良. 双缝, 单缝和多缝的干涉和衍射光强分布曲线的计算 [J]. 云南教育学院学报, 1999, 15(5): 26-28.
- [6] 张明霞, 艾小刚. 夫琅禾费单缝衍射光强分析与探讨 [J]. 湘潭师范学院学报(自然科学版), 2009, 31(4): 17-20.
- [7] 李玉春, 张学刚. 夫琅禾费单缝衍射光强分布的探讨 [J]. 大庆师范学院学报, 2007, 27(5): 85-87.
- [8] 姜丽娜. 单缝夫琅和费单缝衍射光强分布的 3 种计算方法 [J]. 辽宁科技大学学报, 2011, 34(2): 123-128.
- [9] 王小平, 江键, 许佳捷. 波动光学条纹公式及其条纹级次的讨论 [J]. 实验科学与技术, 2015, 13(1): 4-5, 79.
- [10] 宋福. 用半波带法求单缝衍射的光强分布 [J]. 山西师范大学学报, 1991, 5(3): 24-27.

## On Theoretical Analysis of Light Diffraction and Its Mathematica Simulation

CHEN Xue-wen, LUO Yuan-yuan, ZHANG Jia-wei, YAO Xue

*Department of Math and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China*

**Abstract:** The intensity distribution of multi slit interference of light has been deduced by rotational vector first, and the intensity distribution of single slit diffraction has been obtained in the condition of the slit number. Then, the intensity distribution of grating diffraction has been obtained on the basis of multi slit interference and single slit diffraction. In addition, the Mathematica simulation has been applied to the class of light diffraction. The Fraunhofer single slit diffraction and diffraction grating have been simulated through the interactive function of Mathematica, and the corresponding dynamic graphics, whose parameters can be adjusted (such as wavelength, slit width, grating constant, diffraction angle) are acquired. This can help the students to establish a clear physical picture in the classroom, to understand the principle of diffraction of light better.

**Key words:** diffraction of light; rotational vector; Mathematica; simulation

责任编辑 潘春燕