第 43 卷 第 12 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2018 年 12 月
Vol. 43 No. 12 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Dec. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.001

矩阵 Hadamard 积谱半径的新上界①

钟 琴[1], 牟谷芳[2]

1. 四川大学锦江学院 数学教学部,四川 彭山 620860;
2. 乐山师范学院 数学与信息科学学院,四川 乐山 614000

摘要: 对于两个非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积,利用特征值包含域定理给出谱半径的新上界估计式. 数值例子表明新估计式在某些情况下比现有的估计式更为精确,并且这些估计式只依赖于两个非负矩阵的元素,更容易计算.

关 键 词: 非负矩阵;Hadamard 积;谱半径;上界

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2018)12-0001-05

矩阵的 Hadamard 积是特殊的矩阵乘积,被广泛地应用于偏微分方程中的弱极小原理、概率论中特征函数以及控制论等领域. 在这些研究中,非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计受到广大专家和学者的关注和研究,得到了一些很好的结果. 然而,在这些估计式中,或涉及非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的谱半径的计算,或涉及非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的雅可比迭代阵谱半径的计算,当矩阵的阶数较大时,这是难以实现的. 本文利用特征值包含域定理,给出非负矩阵 Hadamard 积谱半径上界的新估计式,计算简单易行,和现有的相关结果相比,精确度更高.

1 预备知识

$\mathbb{N}$ 表示正整数的集合. $R^{n\times n}$($C^{n\times n}$) 表示 n 阶实(复)矩阵集. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,若 $a_{ij}\geqslant 0(i,j\in\mathbb{N})$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$. $\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱,$\rho(\boldsymbol{A})$ 表示非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径,根据 Perron-Frobenius 定理可知 $\rho(\boldsymbol{A})\in\sigma(\boldsymbol{A})$.

定义 1[1] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,如果存在置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别是 k,l 阶方阵,$k\geqslant 1$ 和 $l\geqslant 1$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是可约矩阵,否则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约矩阵.

定义 2[1] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,用 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵,即 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=(a_{ij}b_{ij})\in C^{m\times n}$,称 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积.

关于非负矩阵 Hadamard 积谱半径的上界估计前人已经做了很多的研究.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,文献[1] 给出了以下经典的结论:

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B}) \tag{1}$$

文献[2] 给出了如下的估计式:

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(\boldsymbol{A})\rho(\boldsymbol{B})-a_{ii}\rho(\boldsymbol{B})-b_{ii}\rho(\boldsymbol{A})\} \tag{2}$$

文献[3] 借助 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的雅可比迭代阵 $\boldsymbol{J_A}$ 和 $\boldsymbol{J_B}$ 得到如下结果:

---

① 收稿日期:2017-10-31
基金项目:四川省教育厅科研项目(18ZB0364);四川大学锦江学院青年教师科研项目(QNJJ-2018-A01).
作者简介:钟 琴(1982-),女,副教授,主要从事矩阵理论及其应用的研究.

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant(1+\rho(\boldsymbol{J_A})\rho(\boldsymbol{J_B}))\max_i(a_{ii}b_{ii})\tag{3}$$

文献[4]给出了一个新的上界估计式:

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(\rho(\boldsymbol{A})-a_{ii})(\rho(\boldsymbol{B})-b_{ii})\times(\rho(\boldsymbol{A})-a_{jj})(\rho(\boldsymbol{B})-b_{jj})]^{\frac{1}{2}}\}\tag{4}$$

另外,文献[5-14]也对非负矩阵Hadamard积谱半径的上界估计进行了深入的研究.本文利用特征值包含域定理,给出一些只包含非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 元素的上界估计式.

2 非负矩阵Hadamard积谱半径的上界

首先给出一些关于特征值包含域的引理和定理.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,记 $R_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}$.

引理1[1] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$0\leqslant\alpha\leqslant1$,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值位于 n 个圆盘的并集

$$\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\leqslant\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ki}|\Big)^{1-\alpha}\right\}$$

引理2[5] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$0\leqslant\alpha\leqslant1$,则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值位于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个圆盘的并集

$$\bigcup_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{n}\left\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ik}|\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|a_{jk}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}|a_{ki}|\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|a_{kj}|\Big)^{1-\alpha}\right\}$$

引理3[6] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in R^{n\times n}$,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是两个对角矩阵,则有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE})$$

定理1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 且不可约,则对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,有

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\{a_{ii}b_{ii}+P_i^{\alpha}Q_i^{1-\alpha}\}\tag{5}$$

其中 $P_i=\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ik}b_{ik}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}$,$Q_i=\sum\limits_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ki}b_{ki}R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}(i\in\mathbb{N})$.

证 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可约,所以 $R_i(\boldsymbol{A})\neq0$,$R_i(\boldsymbol{B})\neq0(i\in\mathbb{N})$.令

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(R_1(\boldsymbol{A})R_1(\boldsymbol{B}),R_2(\boldsymbol{A})R_2(\boldsymbol{B}),\cdots,R_n(\boldsymbol{A})R_n(\boldsymbol{B}))$$

显然 $\boldsymbol{D}$ 可逆,且 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=\rho(\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{D})$,根据引理1得

$$|\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})-a_{ii}b_{ii}|\leqslant\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ik}b_{ik}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ki}b_{ki}R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}\Big)^{1-\alpha}$$

又因为 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})>a_{ii}b_{ii}$,故有

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant&a_{ii}b_{ii}+\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ik}b_{ik}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ki}b_{ki}R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}\Big)^{1-\alpha}\leqslant\\&\max_i\left\{a_{ii}b_{ii}+\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ik}b_{ik}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{a_{ki}b_{ki}R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}\Big)^{1-\alpha}\right\}=\\&\max_i\{a_{ii}b_{ii}+P_i^{\alpha}Q_i^{1-\alpha}\}\end{aligned}$$

特别地,在定理1中令 $\alpha=\frac{1}{2}$,我们将得到以下定理:

定理2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 且不可约,则

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\{a_{ii}b_{ii}+\sqrt{P_iQ_i}\}\tag{6}$$

其中 P_i,Q_i 的定义同定理1.

定理3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant0$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant0$ 且不可约,则对任意的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,有

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{2}}\}\tag{7}$$

其中 P_i, Q_i 的定义同定理 1.

证　因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可约，所以 $R_i(\boldsymbol{A}) \neq 0$，$R_i(\boldsymbol{B}) \neq 0 (i \in \mathbb{N})$. 令：

$$\boldsymbol{D}_1 = \operatorname{diag}(R_1(\boldsymbol{A}), R_2(\boldsymbol{A}), \cdots, R_n(\boldsymbol{A}))$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \operatorname{diag}(R_1(\boldsymbol{B}), R_2(\boldsymbol{B}), \cdots, R_n(\boldsymbol{B}))$$

显然 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$ 可逆，记 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1$，$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_2$，则 $\widetilde{\boldsymbol{A}} \circ \widetilde{\boldsymbol{B}} = (\tilde{c}_{ij})$. 当 $i = j$ 时，$\tilde{c}_{ij} = a_{ii}b_{ii}$；当 $i \neq j$ 时，$\tilde{c}_{ij} = \dfrac{a_{ij}b_{ij}R_j(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}$. 根据引理 3 有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} \circ \widetilde{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1) \circ (\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_2) = (\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{D}_2^{-1})(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1) = (\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)^{-1}(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})(\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1)$$

所以 $\rho(\widetilde{\boldsymbol{A}} \circ \widetilde{\boldsymbol{B}}) = \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$. 令 $\rho(\widetilde{\boldsymbol{A}} \circ \widetilde{\boldsymbol{B}}) = \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) = \lambda$，根据引理 2，存在 $i, j (i \neq j)$，使得

$$\begin{aligned} &|\lambda - a_{ii}b_{ii}|\,|\lambda - a_{jj}b_{jj}| \leqslant \\ &\left(\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ik}b_{ik}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}\right|\sum_{k=1,\,k\neq j}^{n}\left|\frac{a_{jk}b_{jk}R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}{R_j(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{B})}\right|\right)^{\alpha}\cdot \\ &\left(\sum_{k=1,\,k\neq i}^{n}\left|\frac{a_{ki}b_{ki}R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}\right|\sum_{k=1,\,k\neq j}^{n}\left|\frac{a_{kj}b_{kj}R_j(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{B})}{R_k(\boldsymbol{A})R_k(\boldsymbol{B})}\right|\right)^{1-\alpha} = \\ &(P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

又因为 $\lambda - a_{ii}b_{ii} > 0$，$\lambda - a_{jj}b_{jj} > 0$，故有

$$(\lambda - a_{ii}b_{ii})(\lambda - a_{jj}b_{jj}) \leqslant (P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha}$$

解得

$$\lambda \leqslant \frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4(P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{2}}\}$$

也即

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) &\leqslant \frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4(P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \\ &\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4(P_iP_j)^{\alpha}(Q_iQ_j)^{1-\alpha}]^{\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

注 1　若非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有若干零行，设其编号为 $k_1, k_2, \cdots, k_t$，非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有若干零行，设其编号为 $k_1', k_2', \cdots, k_t'$，此时分别划去非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 和 $k_1', k_2', \cdots, k_t'$ 行，以及 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 和 $k_1', k_2', \cdots, k_t'$ 列分别得矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}$，且有 $\rho(\overline{\boldsymbol{A}} \circ \overline{\boldsymbol{B}}) = \rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B})$，对矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 利用定理 3 同样可得结论成立.

特别地，在定理 3 中令 $\alpha = \dfrac{1}{2}$，我们将得到以下定理：

定理 4　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \geqslant 0$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n} \geqslant 0$ 且不可约，则

$$\rho(\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}) \leqslant \max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4\sqrt{P_iP_jQ_iQ_j}]^{\frac{1}{2}}\} \tag{8}$$

其中 P_i, Q_i 的定义同定理 1.

定理 5　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \geqslant 0$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times n} \geqslant 0$ 且不可约，则

$$\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4\sqrt{P_iP_jQ_iQ_j}]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \max_{i}\{a_{ii}b_{ii} + \sqrt{P_iQ_i}\}$$

其中 P_i, Q_i 的定义同定理 1.

证　不失一般性，假设

$$a_{ii}b_{ii} + \sqrt{P_iQ_i} \geqslant a_{jj}b_{jj} + \sqrt{P_jQ_j}$$

则有

$$\sqrt{P_jQ_j} \leqslant a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj} + \sqrt{P_iQ_i}$$

所以

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii} + a_{jj}b_{jj} + [(a_{ii}b_{ii} - a_{jj}b_{jj})^2 + 4\sqrt{P_iP_jQ_iQ_j}]^{\frac{1}{2}}\} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\sqrt{P_iQ_i}(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj}+\sqrt{P_iQ_i})]^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\sqrt{P_iQ_i}(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})+4P_iQ_i]^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})+2\sqrt{P_iQ_i}]\}=$$

$$a_{ii}b_{ii}+\sqrt{P_iQ_i}$$

从而可得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\sqrt{P_iP_jQ_iQ_j}]^{\frac{1}{2}}\}\leqslant$$

$$\max_i\{a_{ii}b_{ii}+\sqrt{P_iQ_i}\}$$

注 2 定理5说明定理4改进了定理2的结果.

3 数值算例

例 1 考虑非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的Hadamard积 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 的谱半径,其中:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\2&5&1&1\\0&2&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&4&3\\0&0&1&5\end{pmatrix}$$

应用(1)-(4)式,分别得:

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 50.127\,4 \qquad \rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.536\,4$$

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 39.746\,8 \qquad \rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 25.364\,4$$

应用文献[7]的定理3,有

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4a_{ii}b_{ii}a_{jj}b_{jj}\rho^2(\boldsymbol{J}_A)\rho^2(\boldsymbol{J}_B)]^{\frac{1}{2}}\}=24.389\,2$$

应用文献[6]的定理4.1,有 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 23.2$. 应用文献[8]的定理2.1和定理2.2,有 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 24$,$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 22.163\,3$. 应用文献[9]的定理3.3,有 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 21.977\,3$. 应用文献[10]的定理3.1,有 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 21.865$. 应用本文定理2,得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_i\{a_{ii}b_{ii}+\sqrt{P_iQ_i}\}=21.732\,1$$

应用本文定理3($\alpha=0$),得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4P_iP_j]^{\frac{1}{2}}\}=21.889\,5$$

应用本文定理3($\alpha=1$),得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4Q_iQ_j]^{\frac{1}{2}}\}=21.093\,8$$

应用本文定理4,得

$$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4\sqrt{P_iP_jQ_iQ_j}]^{\frac{1}{2}}\}=21.245\,9$$

综上所述,我们将得到非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的Hadamard积谱半径上界的最优估计结果 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\leqslant 21.093\,8$. 实际上,$\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})=20.743\,9$.

4 结束语

本文给出了非负矩阵Hadamard积谱半径的上界估计式,数值例子表明,在一定条件下新估计式优于现有的相关结果,而且本文得到的 $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})$ 的界仅仅依赖于非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的元素,易于计算.

参考文献：

[1] HORN R A，JOHNSON C R. Topics in Matrix Analysis [M]. 北京：人民邮电出版社，2005.

[2] FANG M Z. Bounds on Eigenvalues of Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2007，425(1)：7－15.

[3] HUANG R. Some Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2008，428(7)：1551－1559.

[4] LIU Q B，CHEN G L. On Two Inequalities for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2009，431(5)：974－984.

[5] 逄明贤. 矩阵谱论 [M]. 长春：吉林大学出版社，1989.

[6] LI Y T，LI Y Y，WANG R W，et al. Some New Bounds on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2010，432：536－545.

[7] LIU Q B，CHEN G L，ZHAO L L. Some New Bounds on the Spectral Radius of Matrices [J]. Linear Algebra Appl，2010，432(4)：936－948.

[8] GUO Q P，LI H B，SONG M Y. New Inequalities on Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. J Inequal Appl，2013，2013(1)：433－443.

[9] HUANG Z G，XU Z，LU Q. Some New Estimations for the Upper and Lower Bounds for the Spectral Radius of Nonnegative Matrices [J]. J Inequal Appl，2015，2015(1)：83－96.

[10] CHEN F B，REN X H，HAO B. Some New Eigenvalue Bounds for the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. 数学杂志，2014，34(5)：895－903.

[11] ZHAO L L. Two Inequalities for the Hadamard Product of Matrices [J]. J Inequal Appl，2012，2012(1)：122－127.

[12] CHENG G H，RAO X. Some Inequalities for the Spectral Radius of the Hadamard Product of Two Nonnegative Matrices [J]. J Math Inequal，2013，7(3)：529－534.

[13] CHENG G H. New Bounds for Eigenvalues of the Hadamard Product and the Fan Product of Matrices [J]. Taiwan J Math，2014，18(1)：305－312.

[14] 孙德淑. 非负矩阵 Hadamard 的谱半径上界和 M-矩阵 Fan 积的最小特征值下界的新估计 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(2)：7－11.

New Upper Bounds on the Spectral Radius for the Hadamard Product of Matrices

ZHONG Qin[1]，　MOU Gu-fang[2]

1. Department of Mathematics，Jinjiang College of Sichuan University，Pengshan Sichuan 620860，China；

2. College of Mathematics and Information Science，Leshan Normal University，Leshan Sichuan 614000，China

Abstract：For the Hadamard product of two nonnegative matrices ***A*** and ***B***，new upper bounds of the spectral radius have been given on the basis of the characteristic value containing domain theorems. The given numerical example show that these estimating formulas improve several existing results in some cases，and these bounds are easier calculate for they are only depending on the entries of nonnegative matrices.

Key words：nonnegative matrix；Hadamard product；spectral radius；upper bound

责任编辑　廖　坤　崔玉洁