DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.002

一类分数阶奇异 q-差分方程边值问题解的存在性和唯一性①

郭彩霞， 郭建敏， 田海燕， 康淑瑰

山西大同大学 数学与统计学院，山西 大同 037009

摘要：主要讨论了一类奇异分数阶 q-差分方程边值问题，其中控制函数含有分数阶 q-导数. 首先利用分数阶 q-差分理论将该问题转化为等价的分数阶 q-积分方程，得到了相关的格林函数；其次详细地证明了积分算子的全连续性，通过运用 Schauder 不动点定理和 Banach 不动点定理，证明了该边值问题解的存在性和唯一性，证明过程中，巧妙地应用了贝塔函数，使奇异问题得以解决；最后为了说明定理的有效性，给出了一个例子.

关 键 词：q-差分；奇异；边值问题；贝塔函数；不动点定理

中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2018)12-0006-05

分数阶 q-差分理论是分数阶差分体系中一种特殊的形式，综合了分数阶微积分和离散数学二者的优点，受到了越来越多研究者的关注. 近几十年来，由于分数阶 q-差分微分方程及边值问题在物理学、控制论等领域的广泛应用，分数阶 q-差分方程边值问题解的存在性、唯一性、多解性也成为研究的热点. 关于非线性项可能是奇异项的问题也有研究. 文献[1]运用混合单调方法和 Guo-Krasnoselskii 不动点定理讨论了一类奇异分数阶 q-差分系统正解的存在性和唯一性. 但目前为止，分数阶奇异 q-差分方程边值问题的研究结果还比较少，且大多集中于分数阶奇异微分方程边值问题的研究(见文献[2-12]). 文献[9]使用压缩映射原理和不动点定理讨论了一类反周期分数阶边值问题解的存在性和唯一性. 文献[10]运用 Banach 不动点定理和 Schauder 不动点定理讨论了一类奇异 Caputo 分数阶边值问题解的存在性和唯一性.

受到文献[1,10]的启发，本文主要讨论一类奇异分数阶 q-差分边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_q^{\alpha}u(t) = f(t,\ u(t),\ {}^cD_q^{\beta}u(t)) & 0 < t < 1 \\ u(0) = D_qu(0) = 0,\ D_qu(1) = {}^cD_q^{\beta}u(1) & 0 < \beta < 1 \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 ${}^cD_q^{\alpha}$ 表示 Caputo 分数阶 q-导数，$0 < q < 1$，$\alpha \in (2,\ 3)$，$0 < \beta < 1$，非线性项 f：$(0,\ 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，且 $f(t,\ x,\ y)$ 在 $t = 0$ 点处可能是奇异的.

令

$$E = \{u:\ u \in C[0,\ 1],\ {}^cD_q^{\beta}u \in C[0,\ 1]\} \qquad 0 < \beta < 1$$

定义范数为

$$\| u \| = \max\{\max_{t\in[0,\ 1]} |u(t)|,\ \max_{t\in[0,\ 1]} |{}^cD_q^{\beta}u(t)|\}$$

则$(E,\ \|\cdot\|)$是 Banach 空间. q-伽马函数定义为

$$\Gamma_q(x) = \frac{(1-q)^{(x-1)}}{(1-q)^{x-1}} \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0,\ -1,\ -2,\ \cdots\}$$

---

① 收稿日期：2017-12-17

基金项目：国家自然科学基金项目(11271235，11871314)；国家自然科学基金青年科学基金项目(61803241)；山西大同大学校级青年科研基金项目(2014Q10，2017Q2).

作者简介：郭彩霞(1980-)，女，副教授，主要从事基础数学的研究.

对任意的 $t,s>0$，q-贝塔函数定义为

$$B_q(t,s)=\int_0^1 x^{t-1}(1-qx)^{(s-1)}\mathrm{d}_qx \qquad {}^cD_q^{\alpha}x^{\beta-1}=\frac{\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\beta-\alpha)}x^{\beta-\alpha-1},\ \beta>0$$

引理 1　设 $h\in C[0,T]$ 是给定的函数，$2<\alpha<3$. 那么边值问题：

$$\begin{gathered}{}^cD_q^{\alpha}u(t)=h(t) \qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \\ u(0)=D_qu(0)=0,\ D_qu(1)={}^cD_q^{\beta}u(1) \qquad 0<\beta<1\end{gathered} \tag{2}$$

有唯一的解 $u(t)=\int_0^1 G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_qs$，其中

$$G(t,qs)=\begin{cases}\dfrac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}+\dfrac{\Gamma_q(3-\beta)t^2}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right) & 0\leqslant qs\leqslant t\leqslant 1\\ \dfrac{\Gamma_q(3-\beta)t^2}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\dfrac{(1-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right) & 0\leqslant t\leqslant qs\leqslant 1\end{cases}$$

证　对(2)式两边积分，可得

$$u(t)=I_q^{\alpha}h(t)+c_1+c_2t+c_3t^2=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs+c_1+c_2t+c_3t^2$$

由 $u(0)=0$，可得 $c_1=0$. 而

$$D_qu(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t[\alpha-1]_q(t-qs)^{(\alpha-2)}h(s)\mathrm{d}_qs+c_2+2c_3t$$

则由 $D_qu(0)=0$，可得 $c_2=0$. 又由 $D_qu(1)={}^cD_q^{\beta}u(1)$，可得：

$$c_3=\frac{\Gamma_q(3-\beta)}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\int_0^1\left(\frac{(1-qs)^{(\alpha-\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\frac{(1-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)h(s)\mathrm{d}_qs$$

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma_q(\alpha)}\int_0^t(t-qs)^{(\alpha-1)}h(s)\mathrm{d}_qs+\frac{\Gamma_q(3-\beta)t^2}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\int_0^1\left(\frac{(1-qs)^{(\alpha-\beta-1)}}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\frac{(1-qs)^{(\alpha-2)}}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)h(s)\mathrm{d}_qs=\int_0^1G(t,qs)h(s)\mathrm{d}_qs$$

定义算子 $T:E\longrightarrow E$ 为

$$Tu(t)=\int_0^1G(t,qs)f(s,u(s),{}^cD_q^{\beta}u(s))\mathrm{d}_qs \qquad t\in[0,1]$$

则算子 T 的不动点等价于边值问题(1)的解.

为方便，这里记：

$$k_1=\frac{B_q(1-\delta,\alpha)}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{\Gamma_q(3-\beta)}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta,\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}+\frac{B_q(1-\delta,\alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)$$

$$k_2=\frac{B_q(1-\delta,\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}+\frac{(1+q)}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta,\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}+\frac{B_q(1-\delta,\alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)$$

引理 2　设 $2<\alpha<3$，$0<\delta<1$，$F:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=\infty$. 若 $t^{\delta}F(t)$ 在$[0,1]$上是连续的，则 $u(t)=\int_0^1G(t,qs)F(s)\mathrm{d}_qs$ 在$[0,1]$上是连续的.

证　易知 $u(0)=0$.

情形 1　对 $t_0=0$ 及任意的 $t\in(0,1]$，因为 $t^{\delta}F(t)$ 在$[0,1]$上是连续的，所以存在常数 $M>0$，使得 $|t^{\delta}F(t)|\leqslant M$，则当 $t\to0$ 时，有

$$|u(t)-u(0)|\leqslant \frac{Mt^{\alpha-\delta}}{\Gamma_q(\alpha)}B_q(1-\delta,\alpha)+\frac{M\Gamma_q(3-\beta)t^2}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta,\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\frac{B_q(1-\delta,\alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)\to0$$

情形 2　对 $t_0\in(0,1)$ 及任意的 $t\in(t_0,1]$，当 $t\to0$ 时，有

$$|u(t)-u(t_0)|\leqslant \frac{M(t^{\alpha-\delta}-t_0^{\ \alpha-\delta})B_q(1-\delta,\alpha)}{\Gamma_q(\alpha)}+\frac{\Gamma_q(3-\beta)(t^2-t_0^{\ 2})M}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta,\alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)}-\frac{B_q(1-\delta,\alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)\to0$$

情形 3　对 $t_0 \in (0, 1]$ 及任意的 $t \in [0, t_0]$，证明与情形 2 类似.

引理 3　设 $2 < \alpha < 3$，$0 < \delta < 1$，$f: (0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, \cdot, \cdot) = \infty$. 若 $t^\delta f(t, \cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上连续，则 ${}^cD_q^\beta Tu(t) = {}^cD_q^\beta \left(\int_0^1 G(t, qs) f(s, u(s), {}^cD_q^\beta u(s)) \mathrm{d}_q s\right)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

证　对于 $u \in E$，可知：

$$u(t) \in C[0, 1] \qquad {}^cD_q^\beta u(t) \in C[0, 1]$$

所以存在常数 $M_1 > 0$ 和 $M_2 > 0$，使得对任意 $t \in [0, 1]$ 有：

$$|u(t)| \leqslant M_1 \qquad |{}^cD_q^\beta u(t)| \leqslant M_2$$

由于 $t^\delta f(t, \cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上是连续的，则对于 $-M_1 \leqslant u \leqslant M_1$，$-M_2 \leqslant v \leqslant M_2$，有

$$M_0 = \max_{t \in [0, 1]} |t^\delta f(t, u, v)|$$

因此

$$|{}^cD_q^\beta Tu(t)| \leqslant M_0 \frac{t^{\alpha-\beta-\delta} B_q(1-\delta, \alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)} + \frac{M_0(1+q)t^{2-\beta}}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta, \alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)} + \frac{B_q(1-\delta, \alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)$$

由于 $t^{\alpha-\beta-\delta}$，$t^{2-\beta}$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的，故 ${}^cD_q^\beta Tu(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的.

引理 4　设 $2 < \alpha < 3$，$0 < \delta < 1$，$f: (0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, \cdot, \cdot) = \infty$. 若 $t^\delta f(t, \cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上是连续的，则 $T: E \longrightarrow E$ 是全连续的.

证　对于 $u \in E$，有

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t, qs) f(s, u(s), {}^cD_q^\beta u(s)) \mathrm{d}_q s$$

由引理 2 和引理 3 知 $T: E \longrightarrow E$. 下面分 3 步证明 T 是全连续的.

步骤 1　证明 T 是连续的. 令 $u_0 \in E$，$\| u_0 \| = C_0$. 若 $u \in E$，$\| u - u_0 \| < 1$，则 $\| u \| < 1 + C_0 = C$. 由 $t^\delta f(s, u(s), {}^cD_q^\beta u(s))$ 连续，则 $t^\delta f(s, u(s), {}^cD_q^\beta u(s))$ 在 $[0, 1] \times [-C, C] \times [-C, C]$ 上是一致连续的. 因此，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0 (\eta < 1)$，使得当 $u \in E$，$\| u - u_0 \| < \eta$ 时，有

$$|t^\delta f(s, u(s), {}^cD_q^\beta u(s)) - t^\delta f(s, u_0(s), {}^cD_q^\beta u_0(s))| < \varepsilon \qquad t \in [0, 1] \tag{3}$$

由(3)式可得：

$$|Tu(t) - Tu_0(t)| \leqslant k_1 \varepsilon \qquad |{}^cD_q^\beta Tu(t) - {}^cD_q^\beta Tu_0(t)| \leqslant k_2 \varepsilon$$

从而，当 $\| u - u_0 \| \to 0$ 时，$\| Tu - Tu_0 \| \to 0$，即 $T: E \longrightarrow E$ 是连续的.

步骤 2　令 $\Omega \subset E$ 有界，则对任意 $u \in \Omega$，存在常数 $A > 0$，使得 $\| u \| \leqslant A$. 因为 $t^\delta f(t, u(t), {}^cD_q^\beta u(t))$ 在 $[0, 1] \times [-A, A] \times [-A, A]$ 上是连续的，则存在常数 $L > 0$ 使得对任意 $u \in \Omega$ 和 $t \in [0, 1]$，有

$$|t^\delta f(t, u(t), {}^cD_q^\beta u(t))| \leqslant L$$

进一步有：

$$|Tu(t)| \leqslant k_1 L \qquad |{}^cD_q^\beta Tu(t)| \leqslant k_2 L$$

因此 $T(\Omega)$ 有界.

步骤 3　证明 $T(\Omega)$ 是等度连续的. 对 $t_1, t_2 \in [0, 1]$，$t_1 < t_2$，$u \in \Omega$，有：

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leqslant \frac{L(t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1}) B_q(1-\delta, \alpha)}{\Gamma_q(\alpha)} + \frac{L\Gamma_q(3-\beta)(t_2^2 - t_1^2)}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta, \alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)} + \frac{B_q(1-\delta, \alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right) \tag{4}$$

$$|{}^cD_q^\beta Tu(t_2) - {}^cD_q^\beta Tu(t_1)| \leqslant L\left[\frac{(t_2^{\alpha-\beta-\delta} - t_1^{\alpha-\beta-\delta}) B_q(1-\delta, \alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)} + \frac{(1+q)(t_2^{2-\beta} - t_1^{2-\beta})}{2\Gamma_q(3-\beta)-1-q}\left(\frac{B_q(1-\delta, \alpha-\beta)}{\Gamma_q(\alpha-\beta)} + \frac{B_q(1-\delta, \alpha-1)}{\Gamma_q(\alpha-1)}\right)\right] \tag{5}$$

当 $t_1 \to t_2$ 时，由(4)式和(5)式可得 $\| Tu(t_1) - Tu(t_2) \| \to 0$，从而 $T(\Omega)$ 是等度连续的. 综上所述，由 Arzela-Ascoli 定理可知 T 是全连续的.

定理 1　若以下两个条件成立：

(H1) 对 $t \in [0, 1]$，$x_1, x_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$，存在两个常数 $k > 0$ 和 $0 < \delta < 1$，使得

$$t^{\delta} \mid f(t, x_1, z_1) - f(t, x_2, z_2) \mid \leqslant k(\mid x_1 - x_2 \mid + \mid z_1 - z_2 \mid)$$

(H2) $\theta = \max\{2kk_1, 2kk_2\} < 1$.

那么，问题(1) 有唯一解.

证 令 $u, v \in E$，由条件(H1) 可得：

$$\mid Tu(t) - Tv(t) \mid \leqslant 2kk_1 \parallel u - v \parallel \qquad \mid {}^cD_q^{\beta} Tu(t) - {}^cD_q^{\beta} Tv(t) \mid \leqslant 2kk_2 \parallel u - v \parallel \tag{6}$$

综合(6) 式及条件(H2) 可得 $\parallel Tu - Tv \parallel \leqslant \theta \parallel u - v \parallel$，则 T 是压缩映射. 从而由 Banach 不动点定理知 T 有一个不动点，即问题(1) 有唯一解.

定理 2 设 $2 < \alpha < 3$，$0 < \delta < 1$，$f: (0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，且 $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, \cdot, \cdot) = \infty$. 若 $t^{\delta} f(t, \cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上是连续的，则问题(1) 有一个解.

证 由于 $t^{\delta} f(t, \cdot, \cdot)$ 在 $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上是连续的，则存在 $l > 0$，使得

$$l = \max_{t \in [0, 1]} t^{\delta} \mid f(t, u(t), {}^cD_q^{\beta} Tu(t)) \mid$$

取 $r = \max\{lk_1, lk_2\}$，令

$$P = \{u: u \in E, \parallel u \parallel \leqslant r\}$$

我们只需证明 $T: P \longrightarrow P$. 事实上，若 $\parallel u \parallel \leqslant r$，则 $\mid Tu(t) \mid \leqslant lk_1$，$\mid {}^cD_q^{\beta} Tu(t) \mid \leqslant lk_2$. 进一步，$\parallel Tu \parallel \leqslant r$. 由引理 2 和引理 3 可知 $Tu(t) \in C[0, 1]$，${}^cD_q^{\beta} Tu(t) \in C[0, 1]$. 因此，$T: P \longrightarrow P$. 则由引理 4 可知 $T: P \longrightarrow P$ 是全连续的. 从而由 Schauder 不动点定理知问题(1) 有一个解.

例 1 考虑下面分数阶 q-差分边值问题

$$\begin{cases} {}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} u(t) = t^{-\frac{1}{2}} \left(Au(t) + B\,{}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(t) + Ce^t \sin^2 t \right) & 0 < t < 1 \\ u(0) = D_{\frac{1}{2}} u(0) = 0, \ D_{\frac{1}{2}} u(1) = {}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(1) \end{cases} \tag{7}$$

其中 $0 < A, B \leqslant 0.002\,08$，$C > 0$.

一方面，取 $\delta = \dfrac{1}{2}$，取 $k = \max\{A, B\}$. 另一方面，通过计算可得：

$$k_1 = 120.358\,8 \qquad k_2 = 239.717\,6$$

$$\theta = \max\{2kk_1, 2kk_2\} \leqslant 0.997\,2 < 1$$

可见，边值问题(7) 满足定理 1 的全部条件. 因此，由定理 1 可知边值问题(7) 有一个解.

注 1 在例 1 中，若 $A, B > 0.002\,1$，$C > 0$，则 $\theta > 1$. 但是

$$\left| t^{\delta} f(t, u(t), {}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(t)) \right| = \left| Au(t) + B\,{}^cD_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u(t) + Ce^t \sin^2 t \right| \leqslant \max\{A, B\} \parallel u \parallel + C = k \parallel u \parallel + C$$

$\lim\limits_{t \to 0^+} f(t, \cdot, \cdot) = \infty$，故边值问题(7) 满足定理 2 的全部条件. 因此，由定理 2 可知边值问题(7) 有一个解.

参考文献：

[1] ZHAO Q B, YANG W G. Positive Solutions for Singular Coupled Integral Boundary Value Problems of Nonlinear Higher-order Fractional q-Difference Equations [J]. Advance in Difference Equations, 2015, 2015(1): 1－22.

[2] ZHANG X G, LIU L S, WU Y H. The Uniqueness of Positive Solution for a Singular Fractional Differential System Involving Derivatives [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(6): 1400－1409.

[3] WANG L, LU X Y. Existence and Uniqueness of Solutions for a Singular System of Higher-Order Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions [J]. Nonlinear Analysis Modelling and Control, 2013, 31(5－6): 493－518.

[4] VERMA A K, AGARWAL R P. Upper and Lower Solutions Method for Regular Singular Differential Equations with Quasi-Derivative Boundary Conditions [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012,

17(12):4551-4558.

[5] VONG S W. Positive Solutions of Singular Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(5-6): 1053-1059.

[6] BAI Z B, SUN W C. Existence and Multiplicity of Positive Solution for Singular Fractional Boundary Value Problems [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 63(9): 1369-1381.

[7] JIANG J Q, LIU L S, WU Y H. Positive Solutions to Singular Fractional Differential System with Coupled Boundary Conditions [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(11): 3061-3074.

[8] 吕亚丹. $2n$ 阶线性 q -差分方程的奇异边值问题的谱理论 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(3): 11-17.

[9] CHAI G Q. Anti-Periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with the Riemann-Liouville Fractional Derivative [J]. Advances in Difference Equations, 2013, 2013: 306.

[10] LI R G. Existence of Solutions for Nonlinear Singular Fractional Differential Equations with Fractional Derivative Condition [J]. Advances in Difference Equations, 2014, 2014: 292.

[11] AGARWAL R P, O'REGAN D, STANEK S. Positive Solutions for Dirichlet Problems of Singular Nonlinear Fractional Differential Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 371(1): 57-68.

[12] 刘芮琪,吴行平,唐春雷. 高维空间中一类奇异 Kirchhoff 型问题正解的存在性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(4): 67-71.

Existence and Uniqueness of Solution for a Class of Singular Fractional *q*-Difference Boundary Value Problem

GUO Cai-xia, GUO Jian-min, TIAN Hai-yan, KANG Shu-gui

School of Mathematics and Statistics, Shanxi Datong University, Datong Shanxi 037009, China

Abstract: In this paper, we have discussed a class of singular fractional q-difference boundary value problems, in which the control function contains fractional q-derivatives. Firstly, it is transformed into an equivalent fractional q-integral equation by using fractional q-difference theory and the related Green's function is obtained. Secondly, the complete continuity of the integral operator is proved in detail. Then the existence and uniqueness of the solution for fractional order q-difference boundary value problems is discussed by means of Banach fixed point theorem and Schauder fixed point theorem. In the process of proof, beta function is skillfully applied to solve the singular problem. At last, an example is given to illustrate the validity of theorems.

Key words: q-difference; singular; boundary value problem; beta function; fixed point theorem

责任编辑 廖 坤 崔玉洁