第 43 卷 第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 12 月
Vol. 43　No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec.　2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.005

最高阶元的阶为 7 及 Sylow 2 -子群的阶为 8 的有限群的结构[①]

陈　梦[1]，　刘正龙[1]，　陈贵云[2]

1. 川北医学院 基础医学院，四川 南充 637100；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 是有限群，由于有限单群可以由群的阶和元素的阶集合刻画，那么减少一些数量作为条件是否仍然可以刻画有限单群？基于此，从 $L_2(7)$的最高阶元的阶和 Sylow 2 -子群的阶出发，即当群 G 的最高阶元的阶为 7 及 Sylow 2 -子群的阶为 8 时，不能刻画 $L_2(7)$，但可以得到群 G 的所有结构.

关　键　词：Sylow 2 -子群；最高阶元的阶；有限群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000 - 5471(2018)12 - 0022 - 04

在有限群的结构研究中，用群的阶、子群的阶、元素的阶得出了若干漂亮的群论性质，如奠定有限群理论基础的 Sylow 定理、Lagrange 定理、柯西定理、奇数阶可解定理等.

20 世纪 80 年代初，文献[1]提出了有限单群的纯数量刻画的猜想：仅用群的阶和元素的集合来刻画有限单群. 此后众多学者对此猜想做了大量的研究，得到了丰富的成果，并最终证明了：所有有限单群都可以用群的阶和元素阶的集合完全确定. 在该猜想得到解决后，一些学者开始关注减少一些数量作为条件是否仍然可以刻画单群，如只用群的阶和最高阶元的阶来刻画单群，并得到了很多单群的刻画. 文献[2－9]就利用群的阶和最高阶元的阶刻画了一些有限单群. 本文放弃使用群的阶的条件，以 $L_2(7)$ 的 Sylow 2 -子群的阶和最高阶元的阶作参照来研究单群，得到了如下结论：

定理 1　设 G 是其 Sylow 2 -子群的阶为 8，最高阶元的阶为 7 的有限群，则下列结论之一成立：

(1°) $G \cong HK$，$|G| = 2^3 \times 7$，H 为初等交换 2 -群，K 为 7 -群；

(2°) $G \cong HK$，$|G| = 2^3 \times 7^\gamma$，$H$ 为四元数群，K 为初等交换 7 -群；

(3°) $G \cong KH$，$|G| = 2^3 \times 3 \times 7^\gamma$，$K$ 为初等交换 7 -群；

(4°) $G \cong KH$，$|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 7$，$K$ 为$\{2, 3\}$-Hall 子群，H 为 7 -群；

(5°) $G \cong ABC$，$|G| = 2^3 \times 3 \times 7$，$A$ 为初等交换 2 -群，B 为 7 -群，C 为 3 -群；

(6°) $G/H \cong L_2(7)$，$|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 7$，$H$ 为方指数为 3 的 $3^{\alpha-1}$ 阶幂零群；

(7°) $G \cong KH$，$|G| = 2^3 \times 5 \times 7^\gamma$，$K$ 为初等交换 7 -群；

(8°) $G/H \cong L_2(7)$，$|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 5^\beta \times 7$，$H$ 为 5^β 或为方次数不大于 9 的 $3^{\alpha-1}$ 阶初等交换群；

(9°) $G/H \cong A_7$，$|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 5^\beta \times 7$，$H$ 为 $5^{\beta-1}$ 阶或 $3^{\alpha-2}$ 阶初等交换群.

引理 1[6]　设有限群 $G = HN$ 是以 N 为核、H 为补的 Frobenius 群. 则 H 的任一 Sylow 子群或为循环群，或为广义四元数群.

---

① 收稿日期：2018 - 04 - 12
基金项目：国家自然科学基金项目(11671324)；南充市校科技战略合作专项(18SXHZ0482).
作者简介：陈　梦(1991 -)，男，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：陈贵云，教授.

引理 2[7]　设 a 是有限群 G 的 2 阶无不动点的自同构，那么对所有 $x \in G$，有

$$x^a = x^{-1}$$

特别地，G 是交换群.

引理 3[10]　设 G 是有限群，G 的素图不连通，则 G 有如下 3 种结构：

(i) Frobenius 群；

(ii) 2-Frobenius 群；

(iii) G 有一正规列：$1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 H 和 G/K 是 π_1 -群，K/H 为非交换单群，其中 $2 \in \pi_1$，H 为幂零群，且 $|G/K| \,\big|\, |\mathrm{Out}(K/H)|$

引理 4[11]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，即 $G = ABC$，其中 $A \trianglelefteq G$，$AB \trianglelefteq G$，AB 是以 A 为核、B 为补的 Frobenius 群，BC 是以 B 为核、C 为补的 Frobenius 群，则：

$$t(G) = 2 \qquad \pi(A) \cup \pi(C) = \pi_1 \qquad \pi(B) = \pi_2$$

且 G 是可解的，B 是 G 的奇阶 Hall 子群，C 为循环群.

定理 1 的证明

证　由 G 的最高阶元的阶为 7 及 Sylow 2 -子群的阶为 8 可得

$$|G| = 2^3 \times M \times 7^\gamma \qquad M = 3^\alpha \times 5^\beta;\ \alpha,\beta \geqslant 0;\ \gamma \geqslant 1$$

情形 1　设 $|G| = 2^3 7^\gamma (\gamma \geqslant 1)$，令 K 为群 G 的 Sylow 7 -子群，H 为群 G 的 Sylow 2 -子群.

由 G 可解知 G 存在极小正规子群 N，N 为初等交换 p -群. 若 $p = 2$，则 $N \mid 2^3$.

若 $|N| = 2$，则 $N \subseteq Z(G)$，于是 G 中有 14 阶元，矛盾.

若 $|N| = 4$，则 $N \cong C_2 \times C_2$，$|\mathrm{Aut}(N)| = |GL(2, 2)| = 6$. 由于$7 \nmid \mathrm{Aut}(N)$，故 G 中有 14 阶元，矛盾.

若 $|N| = 8$，则 $N \cong C_2 \times C_2 \times C_2$，则 $|\mathrm{Aut}(N)| = |GL(3, 2)| = 168$. 由于 $7 \mid 168$，故 $7 \,\big|\, |G/C_G(N)|$. 此时，G 的 Sylow 7 -子群无不动点地作用于 N，因而循环，进而为 7 阶循环群. 故存在群 G 使得 $G = KH$，H 为初等交换 2 -群，$|K| = 7$，$|G| = 2^3 7$，$\pi_e(G) = \{1, 2, 7\}$.

若 $p = 7$，由 $K_1(G) = 7$ 知 $C_N(H) = 1$，即 H 无不动点地作用在 N 上. 因此由引理 1 知 H 为广义四元数群或循环群. 由 $|H| = 2^3$，若 H 为 8 阶循环群，则 G 中有 8 阶元，矛盾. 故 H 为四元数群. 又因为 H 无不动点地作用于 N 上，故 H 中每个非单位元都无不动点地作用于 N 上. 设 a 为 H 中的 2 阶元，由引理 2 知 $\forall x \in N$ 有 $x^a = x^{-1}$，N 为交换群. 又因为 $|x| \,\big|\, 7$，故 N 为初等交换 7 -群. 若 $N < K$，则 $G/O_7(G)$，满足前段要求，从而推知 H 为初等交换 2 -群，矛盾. 因此 $N = K$. 故 $G = HK$，H 为四元数群，K 为初等交换 7 -群. 此时，$\pi_e(G) = \{1, 2, 4, 7\}$.

情形 2　设 $|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 7^\gamma (\alpha, \gamma \geqslant 1)$，则$\{1, 2, 3, 7\} \subseteq \pi_e(G)$，由 $K_1(G) = 7$，知 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，$t(G) \geqslant 2$.

由引理 3 知 G 是 Frobenuis 群，或者 2 - Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，使得 K/H 为非交换单群. 若 G 为 Frobenuis 群，设 K 为其核、H 为其补，于是 K 要么为 Sylow 7 -子群，要么为$\{2, 3\}$-Hall 子群. 若 K 为 Sylow 7 -子群，由于 $K_1(G) = 7$，由文献[11] 中的定理 1 知 H 的 Sylow 2 -子群为广义四元数群，Sylow 3 -子群的阶为 3. 又由 G 可解，$K_1(G) = 7$，知 G 非 3 -闭群，G 有 6 阶元. 此时 G 是以 K 为核、H 为补的 Frobenuis 群，且：

$$|K| = 7^\gamma \qquad H| = 2^3 3$$

$$|G| = 2^3 \times 3 \times 7^\gamma \qquad \pi_e(G) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

若 K 为$\{2, 3\}$-Hall 子群，由文献[11] 中的定理 1 知 Sylow 7 -子群循环，故 Sylow 7 -子群的阶为 7，由 K 幂零知 K 中有 6 阶元，故 $|G| = 2^3 \times 3^\alpha \times 7$，其中 $\mathrm{Exp}(P_2) \leqslant 4$，$\mathrm{Exp}(P_3) = 3$.

若 G 为 2 - Frobenuis 群，则由引理 4 可得 $|A| = 2^3$，$|B| = 7^\gamma$，$|C| = 3$. 又因为 AB 是以 A 为核、B 为补的 Frobenius 群，由引理 1 可得 B 的 Sylow 子群循环. 又由 $K_1(G) = 7$，得 $|B| = 7$. 从而 $|G| = 2^3 \times 3 \times 7$，由 G 可解，设 N 是 G 的极小正规子群，若 N 为 Sylow 7 -子群，则 G 中有 14 阶元，矛盾. 若 N

为 Sylow 3 -子群，则 G 中有 21 阶元，矛盾. 故 N 为 Sylow 2 -子群.

若 $|N|=2$，则 $N\subseteq Z(G)$，于是 G 中有 14 阶元，矛盾.

若 $|N|=4$，则 $N\cong C_2\times C_2$，$|\mathrm{Aut}(N)|=|GL(2,2)|=6$. 由于 $7\nmid|\mathrm{Aut}(N)|$，故 G 中有 14 阶元，矛盾.

若 $|N|=8$，则 $N\cong C_2\times C_2\times C_2$，则 $|\mathrm{Aut}(N)|=|GL(3,2)|=168$. 由于 $21\mid 168$，故 $21\,\Big|\,|G/C_G(N)|$. 此时，取 $GL(3,2)$ 中的 21 阶子群作用于 N 上，即有这样的群 G，使得 $|G|=2^3\times 3\times 7$，$\pi_e(G)=\{1,2,3,6,7\}$，其中 G 的 Sylow 2 -子群为初等交换群，$|B|=7$，$|C|=3$.

若 G 存在一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，由文献[8] 知 K/H 同构于下列单群之一：

$$L_2(7)(2^3\cdot 3\cdot 7)\qquad\qquad L_2(8)(2^3\cdot 3^2\cdot 7)$$

设 $K/H\cong L_2(7)$，把 G/H 作用在 K/H 上，则

$$G/H/C_{G/H}(K/H)\lesssim\mathrm{Aut}(K/H)$$

从而

$$|G/H/C_{G/H}(K/H)|\,\Big|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$$

由于 $C_{G/H}(K/H)=1$，因此 $G/H\lesssim\mathrm{Aut}(K/H)$. 从而

$$G/H/K/H\lesssim\mathrm{Out}(K/H)=\mathrm{Out}(L_2(7))$$

则 $G/H\cong L_2(7)$. 又由 $|G/K|\,\Big|\,|\mathrm{Out}(L_2(7))|$，$|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$，故 $|G/K|=1$，因此 $3^{\alpha-1}\,\Big|\,|H|$，故 $G/H\cong L_2(7)$，H 为方指数为 3 的 $3^{\alpha-1}$ 阶幂零群.

设 $K/H\cong L_2(8)$，则 $|\mathrm{Out}(L_2(8))|=3$，从而 $7\,\Big|\,|H|$，则 H 有一个 Sylow 7 -子群，此时 G 的 Sylow 3 -子群无不动点地作用于该 Sylow 7 -子群上，导致 G 有 9 阶元，矛盾.

情形 3　设 $|G|=2^3\times 5^\beta\times 7^\gamma(\beta,\gamma\geqslant 1)$，$K_1(G)=7$，则 $\{1,2,5,7\}\subseteq\pi_e(G)$，知 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，$t(G)\geqslant 2$.

由引理 3 知 G 是 Frobenuis 群，或者 2 - Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 K/H 为非交换单群. 若 G 为 Frobenuis 群，K 为其核，H 为其补，于是 K 要么为 Sylow 7 -子群，要么为 $\{2,5\}$ - Hall 子群. 若 K 为 $\{2,5\}$ - Hall 子群，则 K 中有 10 阶元，矛盾. 若 K 为 Sylow 7 -子群，由于 $K_1(G)=7$，由文献[11] 中的定理 1 知 H 的 Sylow 2 -子群为广义四元数群，Sylow 5 -子群的阶为 5. 此时 $G=KH$，$|K|=7^\gamma$，$|H|=2^3 5$. $|G|=2^3\times 5\times 7^\gamma$，$\pi_e(G)=\{1,2,4,5,7\}$，$K$ 为初等交换 7 -群.

若 G 为 2 - Frobenuis 群，则由引理 4 可得 $|B|=7^\gamma$. 又因为 AB 是以 A 为核、B 为补的 Frobenius 群，由引理 1 可得 B 的 Sylow 子群循环. 又由 $K_1(G)=7$，得 $|B|=7$. 又因为 BC 是以 B 为核、C 为补的 Frobenius 群，故 $|C|\,\Big|\,(|B|-1)$. 从而 $|C|=2$，$|A|=2^2 5^\beta$. 由于 A 幂零，且 $|A|=2^2 5^\beta$，从而 A 中有 10 阶元，矛盾. 因此 G 不是 2 - Frobenuis 群.

由文献[8] 知 G 无单截断，从而不存在群 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 K/H 为交换单群.

情形 4　设 $|G|=2^3\times 3^\alpha\times 5^\beta\times 7^\gamma(\alpha,\beta,\gamma\geqslant 1)$，$K_1(G)=7$，则 $\{1,2,3,5,7\}\subseteq\pi_e(G)$，知 7 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，$t(G)\geqslant 2$.

由引理 3 知 G 是 Frobenuis 群，或者 2 - Frobenuis 群，或者 G 有一正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 K/H 为非交换单群. 如果 G 是 Frobenuis 群，K 为其核，H 为其补，于是 K 要么为 $\{2,3,5\}$ - Hall 子群，要么为 Sylow 7 -子群. 若 K 为 $\{2,3,5\}$ - Hall 群，则 K 有 30 阶元，矛盾. 若 K 为 Sylow 7 -子群，则 H 为 $\{2,3,5\}$ - Hall 子群，因此 Sylow 3 -子群、Sylow 5 -子群循环，从而它们的阶分别是 3,5，即 $|H|=2^3\times 3\times 5$. 由于 H 不可能有 15 阶元，故 H 不可解，否则 H 有 15 阶子群，即有 15 阶元. 此时 H 的 Sylow 2 -子群只能是四元数群，进而 $H\ncong S_5$，$H\cong 2\cdot A_5$. 但此时 H 有 10 阶元，矛盾. 故 G 不是 Frobenuis 群.

如果 G 是 2 - Frobenuis 群，则由引理 4 易得 $|B|=7$. 又因为 BC 是以 B 为核、C 为补的 Frobenius 群，故 $|C|\,\Big|\,(|B|-1)$，即 $|C|\,\Big|\,6$. 从而 $10\,\Big|\,|A|$. 由 A 幂零知，A 中有 10 阶元，矛盾. 因此 G 不是 2 -

Frobenuis 群.

从而 G 存在一正规列 $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$，由文献[8]知 K/H 同构于下列单群之一：

$$L_2(7)(2^3 \cdot 3 \cdot 7) \qquad L_2(8)(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) \qquad A_7(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)$$

类似情形 2 中的证明可得：

$G/H \cong L_2(7)$，H 为 5^β 阶或方次数不大于 9 的 $3^{\alpha-1}$ 阶初等交换群；

$G/H \cong A_7$，H 为 $5^{\beta-1}$ 或 $3^{\alpha-2}$ 阶初等交换群.

参考文献：

[1] 施武杰. A_5 的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报，1986(3)：11－14.

[2] 何立官，陈贵云. 关于一些交错单群的新刻画 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(2)：46－49.

[3] 何立官，陈贵云. 关于一些对称群的新刻画 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(6)：1－3.

[4] 高彦伟，曹洪平. 交错单群 $A_n(5 \leqslant n \leqslant 15)$的一个新刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(2)：68－71.

[5] 高彦伟，曹洪平，陈贵云. 散在单群的一个新刻画 [J]. 数学年刊，2016，37A(1)：109－114.

[6] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，2001.

[7] KURZWEIL H，STELLMACHER B. 有限群论导引 [M]. 施武杰，李士恒，译. 北京：科学出版社，2009.

[8] CONWAY J H，CURTIS R T，NORTON S P，et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford：Clarendon Press，1985.

[9] RRANDL R，SHI W J. Finite Groups Whose Element Orders are Consecutive Integers [J]. J Algebre，1991，143(2)：388－400.

[10] WILLIAMS J S. Prime Graph Comfonments of Finite Group [J]. Journal of Algebra，1981，69(2)：487－513.

[11] 陈贵云. Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1995，20(5)：485－487.

[12] 陈　梦，陈贵云. 最高阶元的阶为 5 及 Sylow 2 -子群的阶为 2,4,8 时的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：52－55.

Characterize of Finite Group by the Largest Element Order is 7 and Sylow 2-Subgroup Order is 8

CHEN　Meng[1]，　LIU Zheng-long[1]，　CHEN Gui-yun[2]

1. School of Basic Medical Sciences，North Sichuan Medical College，Nanchong Sichuan 637100，China；

2. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Let G be a finite group，because of a finite simple group using the order of G and the set of orders of elements in G，then reducing the number of conditions and whether or not can describe finite simple groups. Based on this，we starting in this paper from the Sylow 2-subgroup and the order of the largest element of $L_2(7)$，this is，the largest element order is 7 and Sylow 2-subgroup order is 8 of G，here $\mathrm{L}_2(7)$ can not be portrayed，but we obtain all the characterize of G.

Key words：Sylow 2-subgroup；the largest element order；finite group

责任编辑　廖　坤　崔玉洁