DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.006

极大子群都同构的有限 p-群[①]

周燕博, 刘建军

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 设群 G 是一个有限 p-群. 如果 G 的所有极大子群都同构,则称 G 为 MI 群. 利用正则 p-群以及 MI 群的性质,通过分类讨论的方法,给出了阶不大于 p^6 的 MI 群的结构.

关 键 词: 极大子群;内交换 p-群;正则 p-群

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2018)12-0026-04

所有极大子群都同构的有限 p-群被称为 MI 群. 如果 G 是 MI 群,则 $G/Z(G)$ 也是 MI 群. 文献[1]研究了每个指数为 p^2 的子群是交换的 MI 群,并给出了分类,且这样的群至多由 3 个元生成. 文献[2]给出余类数为 2 的 MI 群的结构. 文献[3]考虑了一个 MI 群 P 单列地作用在它的下中心群列中 $K_2(P)$ 上的情形,并证明了 P 的类至多为 3. 文献[4]研究了 MI 群的余类数与幂零类的关系,证明了余类数为 r 的 MI 群的幂零类至多为 2^r+1. 文献[5-6]分别给出了交换及内交换、亚循环及超特殊的 MI 群的结构. 文献[7]给出了幂零类为 3 的极大自同构 p-群的完全分类,并得出极大自同构 p-群都是 MI 群. 本文分类了不大于 p^6 阶的 MI 群. 其它的关于 p-群极大子群的研究见文献[8-9]. 本文所用的符号术语参见文献[10].

引理 1[10,定理2.3.7] 设 G 是内交换 p-群,则 G 是下列群之一:

(i) Q_8;

(ii) 亚循环群 $M_p(n,m)=\langle a,b \mid a^{p^n}=b^{p^m}=1, a^b=a^{1+p^{n-1}}\rangle$,其中 $n\geqslant 2$, $m\geqslant 1$;

(iii) 非亚循环群 $M_p(n,m,1)=\langle a,b,c \mid a^{p^n}=b^{p^m}=c^p=1, [a,b]=c, [a,c]=[b,c]=1\rangle$,其中 $n\geqslant m$. 若 $p=2$,则 $n+m\geqslant 3$.

引理 2[2,引理1] 设 G 是有限 p-群. 若 G 是 MI 群且 $Z_n(G)\neq G$,则 $Z_n(G)\leqslant \Phi(G)$.

引理 3[2,引理2] 若 G 是非交换 p-群且是 MI 群,则 $|Z_2(G)|\geqslant p^3$.

引理 4[11,引理4.2] 设 G 是一个有限 p-群且 $|G'|=p$,则 $G=(A_1*A_2\cdots*A_s)Z(G)$,其中 $A_1,\cdots,A_s$ 是极小非交换子群.

定理 1 设 G 是 p^3 阶群. 若 G 是 MI 群,则 G 同构于下列群之一:

(i) C_{p^3};(ii) $C_p\times C_p\times C_p$;(iii) Q_8;(iv) $M_p(1,1,1)$.

定理 2 设 G 是 p^4 阶群. 若 G 是 MI 群,则 G 同构于下列群之一:

(i) C_{p^4};(ii) $C_{p^2}\times C_{p^2}$;(iii) $C_p\times C_p\times C_p\times C_p$;(iv) $M_p(2,2)$.

证 若 G 为交换群,显然 G 为(i)或(ii)或(iii).

若 G 为非交换群. 因为 G 为 p^4 阶群,所以 G 有交换极大子群. 因为 G 为 MI 群,所以 G 为内交换 p-群. 由引理 1 得:G 为 $M_p(3,1)$ 或 $M_p(2,2)$ 或 $M_p(2,1,1)$. 故 G 只能为(iv).

① 收稿日期:2018-06-20
基金项目:国家自然科学基金项目(11301426);重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2018jcyjAX0147).
作者简介:周燕博(1992-),男,硕士研究生,主要从事群论的研究.
通信作者:刘建军,博士,副教授.

定理 3　设 G 是 p^5 阶的正则 p-群. 若 G 是 MI 群，则 G 同构于下列群之一：

(1°) C_{p^5}；(2°) $C_p\times C_p\times C_p\times C_p\times C_p$；(3°) $M_p(2,2,1)(p\geqslant 3)$；

(4°) $\langle a,b\mid a^{p^2}=b^{p^2}=[a,b]^p=[a,b,a,b]=[a,b,b,a]=1,[a,b,a]=a^p,[a,b,b]=b^p\rangle$ $(p\geqslant 5)$；

(5°) $\langle a,b\mid a^{p^2}=b^{p^2}=[a,b]^p=[a,b,a,a]=[a,b,b,b]=1,[a,b,a]=b^p,[a,b,b]=a^{pm}\rangle$（$p\geqslant 5$ 且 m 是模 p 平方非剩余的最小正整数）；

(6°) $\langle a,b\mid a^{p^2}=b^{p^2}=[a,b]^p=[a,b,a,a]=[a,b,b,b]=1,[a,b,a]=b^p,[a,b,b]=a^{pg}b^p\rangle$（$p\geqslant 5$，$1\leqslant g\leqslant p-1$ 且 $4g+1$ 是某固定的模 p 平方非剩余）；

(7°) $M_p(1,1,1)*M_p(1,1,1)(p\geqslant 3)$；

(8°) $\langle a,b\mid a^p=b^p=[a,b]^p=[a,b,a]^p=[a,b,b]^p=[a,b,a,a]=[a,b,a,b]=[a,b,b,a]=[a,b,b,b]=1\rangle(p\geqslant 5)$.

证　若 G 为交换群，显然 G 为(1°) 或(2°).

若 G 为非交换的正则 p-群，则 $|\Omega_1(G)|=|G/\mho_1(G)|$ 且 $p\geqslant 3$. 由引理 3 得 $c(G)=2,3$.

若 $|\Omega_1(G)|=p^2$，则 G 是非交换的亚循环群，且 $\exp(G)\geqslant p^3$. 因为 G 为 MI 群，所以 $\exp(G)=p^3$. 令

$$G/\Omega_1(G)=\langle a\Omega_1(G),b\Omega_1(G)\rangle \qquad |a|=p^3,\ |b|=p^2$$

G 有极大子群 $M_1=\langle a,\Omega_1(G)\rangle$ 和 $M_2=\langle a^p,b,\Omega_1(G)\rangle$ 是不同构的.

若 $|\Omega_1(G)|=p^3$，则 $|\mho_1(G)|=p^2$. 同理可证 $\exp(G)=p^2$. 令：

$$G/\Omega_1(G)=\langle a\Omega_1(G)\rangle\times\langle b\Omega_1(G)\rangle \qquad \mho_1(G)=\langle a^p\rangle\times\langle b^p\rangle$$

则 $G=\langle a,b\rangle$ 且 $\Omega_1(G)=\Phi(G)=\mho_1(G)G'$. 因为$\mho_1(G')=1$，所以$\mho_1(G)\leqslant Z(G)$. 如果 $c(G)=2$，则 G 有交换极大子群. 由引理 1 得 G 为(3°). 如果 $c(G)=3$，则 $\Omega_1(G)=\Phi(G)=G'$ 且$\mho_1(G)=Z(G)$. 令 $M\lessdot G$. 如果 $|\Phi(M)|=p$，则 G 为(4°). 如果 $|\Phi(M)|=p^2$，则 G 为(5°) 或(6°). 若 $|\Omega_1(G)|=p^4$，则 $\exp(G)=p^2$. 显然 G 不为 MI 群.

若 $|\Omega_1(G)|=p^5$，则 $\exp(G)=p$. 如果 $c(G)=2$，由引理 2 得 $G'=Z(G)=\Phi(G)$. 如果 $|G'|=p$，由引理 4 得 G 为(7°). 如果 $|G'|=p^2$，由文献[12] 的引理 3.2 得到 G 有交换极大子群，矛盾. 如果 $c(G)=3$，则 $|Z(G)|=p^2$. 由引理 2 得 $\Phi(G)=Z_2(G)$ 为 p^3 阶初等交换群且 $p\geqslant 5$，故 G 为(8°).

定理 4　设 G 是 p^6 阶的正则 p-群. 若 G 是 MI 群，则 G 同构于下列群之一：

(1°) C_{p^6}；

(2°) $C_{p^3}\times C_{p^3}$；

(3°) $C_{p^2}\times C_{p^2}\times C_{p^2}$；

(4°) $C_p\times C_p\times C_p\times C_p\times C_p\times C_p$；

(5°) $M_p(3,3)(p\geqslant 3)$；

(6°) $\langle a,b\mid a^{p^2}=b^{p^2}=c^{p^2}=1,[a,b]=c,[a,c]=[b,c]=1\rangle(p\geqslant 3)$；

(7°) $\langle a,b,c\mid a^{p^2}=b^{p^2}=c^{p^2}=[a^p,b]=[a^p,c]=[b^p,a]=[b^p,c]=[c^p.a]=[c^p,b]=1,[a,b]=c^p,[c,a]=b^p,[b,c]=a^p\rangle(p\geqslant 3)$；

(8°) $\langle a,b,c\mid a^{p^2}=b^{p^2}=c^{p^2}=[a^p,b]=[a^p,c]=[b^p,a]=[b^p,c]=[c^p.a]=[c^p,b]=1,[a,b]=c^p,[b,c]=\beta_1,[c,a]=\beta_2,a^p=\beta_1{}^r\beta_2{}^{-1},b^p=\beta_1\beta_2\rangle$（$1\leqslant r\leqslant p-2$，且 $-r,-(r+1),-(r+1)/r$ 中至少有两个是模 p 的平方剩余，$p\geqslant 3$）；

(9°) $\langle a,b,c\mid a^{p^2}=b^{p^2}=c^{p^2}=[a^p,b]=[a^p,c]=[b^p,a]=[b^p,c]=[c^p.a]=[c^p,b]=1,[a,b]=c^p,[b,c]=\beta_1,[c,a]=\beta_2,a^p=\beta_1{}^r\beta_2{}^{-1},b^p=\beta_1\beta_2\rangle$（$1\leqslant r\leqslant p-2$，且 $-r,-(r+1),-(r+1)/r$ 中至多有一个是模 p 的平方剩余，$p\geqslant 3$）；

(10°) $\langle a,b\mid a^{p^2}=b^{p^2}=c^p=c_1{}^p=[a^p,b]=[b^p,a]=[c_1,a]=[c_1,b]=1,[a,b]=c,[c,b]=c_1,[a,b,a]^r=b^p\rangle$（$r=1,v$，且 v 是模 p 平方非剩余的最小正整数，$p\geqslant 5$）；

(11°) $\langle a, b, c, d \mid a^p = b^p = c^p = d^p = x^p = y^p = [a, d] = [b, c] = 1, [a, b] = [c, d] = x, [a, c] = y, [b, d] = y^g\rangle$($p \geqslant 3$，且 g 是模 p 原根的最小正整数)；

(12°) $\langle a, b, c \mid a^p = b^p = c^p = c_1{}^p = c_2{}^p = c_3{}^p = 1, [a, b] = c_1, [a, c] = c_2, [b, c] = c_3, [c_i, a] = [c_i, b] = [c_i, c] = 1, i = 1, 2, 3\rangle$($p \geqslant 3$)；

(13°) $\langle a, b \mid a^p = b^p = [a, b]^p - [a, b, a]^p = [a, b, b]^p = [a, b, a, a]^p = [a, b, a, b] = [a, b, b, a] = [a, b, a, a, a] = [a, b, a, a, b] = 1, [a, b, b, b] = [a, b, a, a]^{-m}\rangle$($p \geqslant 5$).

证 若 G 为交换群，显然 G 为(1°)或(2°)或(3°)或(4°).

若 G 为非交换正则 p-群，则 $|\Omega_1(G)| = |G/\mho_1(G)|$ 且 $p \geqslant 3$. 由引理 3 得 $c(G) = 2, 3, 4$.

若 $|\Omega_1(G)| = p^2$，则 G 是非交换的亚循环群. 同理可证 $\exp(G) = p^3$. 如果 $G = \langle a, b \mid a^{p^3} = b^{p^3} = 1, [a, b] = a^p\rangle$，则 $M_1 = \langle a^p, b\rangle$ 和 $M_2 = \langle a, b^p\rangle$ 是 G 的不同构的极大子群，故 G 为(5°).

若 $|\Omega_1(G)| = p^3$，同理可证 $\exp(G) = p^2$. 进而，$\Omega_1(G) = \mho_1(G)$. 由文献[2]的引理 12 得到 $c(G) = 2, 3$.

情形 1 $c(G) = 2$. 如果 $|G'| = p$，由引理 4 得 $|Z(G)| = p^4$，进而 G 有交换极大子群，矛盾. 如果 $|G'| = p^2$，则 $|Z(G)| \leqslant p^3$. 当 $|Z(G)| = p^3$ 时，类似文献[12]的引理 3.2 的证明过程可得 G 有交换极大子群，矛盾. 如果 $Z(G) = G'$，则 $G/Z(G)$ 只能为(p^2, p^2)-型的交换群，故 G 为(6°). 如果 $|G'| = p^3$，则 $Z(G) = \Phi(G)$ 为初等交换群. 设 $M \lessdot G$. 若 $|\Phi(M)| = p^3$，则 G 为(7°)或(8°)或(9°). 若 $|\Phi(M)| = p^2$，可令 $G = \langle a, b, c\rangle$，则$\langle a, b\rangle$,$\langle b, c\rangle$,$\langle a, c\rangle$ 是 p^4 阶亚循环群，矛盾.

情形 2 $c(G) = 3$. 如果 $|Z(G)| = p$，则 $G/Z(G) \cong M_p(2, 2, 1)$，进而 $G' \leqslant Z(G)$，矛盾. 如果 $|Z(G)| = p^2$，则 $G/Z(G) \cong M_p(2, 2)$ 且 $|G'| \leqslant p^3$. 因为

$$|G/Z(G) : \mho_1(G/Z(G))| = |\Omega_1(G/Z(G))| = p^2$$

所以 $Z(G)$ 为循环群. 令 $G = \langle a, b\rangle$，且 $a^{p^2} = b^{p^2} = [a, b]^{p^2} = 1$. 若 $G' = \langle [a, b]\rangle$，同理可证 $G' \leqslant Z(G)$，矛盾. 若 $|G'| = p^3$，则 $Z(G) \leqslant G'$，矛盾. 如果 $|Z(G)| = p^3$，则$G/Z(G) \cong M_p(1, 1, 1)$. 因为

$$|G/Z(G) : \mho_1(G/Z(G))| = |\Omega_1(G/Z(G))| = p^3$$

所以 $Z(G) = \Omega_1(G) = \mho_1(G)$. 令 $G = \langle a, b\rangle$，且 $a^{p^2} = b^{p^2} = [a, b]^{p^2} = 1$，则 $a^p \in Z(G)$. 因此$[a^p, b] = 1$，从而$[a, b]^p = 1$，矛盾.

若 $|\Omega_1(G)| = p^4$，则 $|\mho_1(G)| = p^2$. 同理可证 $\exp(G) = p^2$，$\Omega_1(G) = \Phi(G) = \mho_1(G)G'$ 且$\mho_1(G) \leqslant Z(G)$. 如果 $c(G) = 2$，则 G 有交换极大子群，矛盾. 如果 $c(G) = 3$ 且 $p \geqslant 5$，则 G' 和 $\Omega_1(G)$ 是初等交换群. 同理可证 $|G'| = p^3$，$|Z(G)| = p^3$，且 $|G \cap \mho_1(G)| = p$. 令 $M \lessdot G$，则 $|\Phi(M)| = p^2$ 且 $Z(M) = Z(G)$，故 G 为(10°). 如果 $c(G) = 4$. 因为 $G/Z(G)$ 是 MI 群，所以 $|Z(G)| = p$，矛盾.

若 $|\Omega_1(G)| = p^5$，则 $\exp(G) = p^2$. 显然 G 不为 MI 群.

若 $|\Omega_1(G)| = p^6$，则 $\exp(G) = p$. 如果 $c(G) = 2$. 由引理 2 得 $G' = \Phi(G) = Z(G)$. 由引理 4 得 $|G'| \neq p$. 如果 $|G'| = p^2$，则 $G' = \Phi(G) = Z(G)$. 设 $M \lessdot G$. 若 $|\Phi(M)| = p$，由引理 4 得 $M = Z(M) * M_p(1, 1, 1)$，故 G 为$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. 令$\langle ac, b, d\rangle \leqslant M_1 \lessdot G$，而 $|\Phi(M_1)| = p^2$，矛盾. 若 $|\Phi(M)| = p^2$，则 $\Phi(M) = Z(G) = Z(M)$，故 G 为(11°). 如果 $|G'| = p^3$，则 $G' = \Phi(G) = Z(G)$，故 G 为(12°). 如果 $c(G) = 3$，因为 $G/Z(G)$ 是 MI 群，所以 $G' = \Phi(G)$ 为 p^4 阶群. 因为 G 是二元生成且 $c(G) = 3$，所以 $|G'| \leqslant p^3$，矛盾. 如果 $c(G) = 4$，因为 $G/Z(G)$ 是 MI 群，所以 $|Z(G)| = p$. 设 $M \lessdot G$，由文献[2]的引理 12 得到 $|\Phi(M)| = p^2$ 且 $|Z(M)| \leqslant p^2$. 假设 $|Z(M)| = p$. 令 $G = \langle a, b\rangle$，则有

$$[a, b, a, a]^k = [a, b, a, b] \qquad 1 \leqslant k \leqslant p - 1$$

令 $M_2 = \langle a^{-k}b, \Phi(G)\rangle \lessdot G$，则 $|Z(M_2)| = p^2$，矛盾. 因此$|Z(M)| = p^2$，故 G 为(13°).

参考文献：

[1] HERMANN P Z. On a Class of Finite Groups Having Isomorphic Maximal Subgroups [J]. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1981, 24: 87-92.

［2］ HERMANN P Z. On Finite p-Groups with Isomorphic Maximal Subgroups［J］. J Austral Math Soc，1990，48(2)：199－213.

［3］ HERMANN P Z. (MI)-Groups Acting Uniserially on a Normal Subgroup［J］. London Math Soc，1995，211：264－268.

［4］ MANN A. On p-Groups Whose Isomorphic Maximal Subgroups are Isomorphic［J］. J Austral Math Soc，1995，59(2)：143－147.

［5］ 孙秀娟. 指数为 p^2 的子群都交换的有限 p-群［D］. 临汾：山西师范大学，2006.

［6］ 宋蔷薇，崔双双. 某些 MI 群［J］. 数学研究，2011，44(4)：387－392.

［7］ WANG N E，NEDELA R，HU K. Regular Dessins Uniquely Determined by a Nilpotent Automorphism Group［J］. J Group Theory，2018，21(3)：397－415.

［8］ 薛海波. 一类特殊的有限 3-群［J］. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(8)：7－9.

［9］ 蹇 祥，吕 恒. 具有极大正规化子的有限群［J］. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(12)：56－60.

［10］ 徐明曜，曲海鹏. 有限 p-群［M］. 北京：北京大学出版社，2010.

［11］ BERKOVICH Y. Groups of Prime Power Order［M］. Berlin：Walter de Gruyter，2008.

［12］ LV H，ZHOU W，WU H J. Finite p-Groups with Small Subgroups Generated by Two Conjugate Elements［J］. Arch Math，2013，100(4)：301－308.

On Finite p - Groups Whose All Maximal Subgroups are Isomorphic

ZHOU Yan-bo， LIU Jian-jun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A finite p-group is said to be a MI group if all of its maximal subgroups are isomorphic. In this paper，the structure of MI groups whose order is less than or equal to p^6 is given by means of the properties of regular p-groups and MI groups.

Key words：maximal subgroups；inner abelian p-group；regular p-group

责任编辑 廖 坤 崔玉洁