DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.008

n-强 Gorenstein AC 投射模①

李倩倩， 杨晓燕

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要： 首先引入 n-强 Gorenstein AC 投射模的概念，研究了其同调性质，给出了由 n-强 Gorenstein AC 投射模构造 1-强 Gorenstein AC 投射模的方法. 之后讨论了当 $m\neq n$ 时，m-强 Gorenstein AC 投射模与 n-强 Gorenstein AC 投射模的关系. 最后证明了任意自正交的 n -强 Gorenstein AC 投射模是投射模.

关 键 词： Level 模；Gorenstein AC 投射模；n-强 Gorenstein AC 投射模

中图分类号： O153.3 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2018)12-0036-05

投射模、内射模和平坦模是经典同调代数中基本且重要的研究对象. 作为投射模的概念的推广，文献[1] 对双边 Noether 环上的有限生成模定义了 G -维数为 0 的模. 文献[2] 定义了 Gorenstein 平坦模. 文献[3] 在一般环上引入了Gorenstein投射模和Gorenstein内射模的概念. 近年来，Gorenstein同调理论受到代数学界的广泛关注，众多学者对此作了大量的研究工作. 文献[4] 引入并研究了 Gorenstein 投射模、Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模的一种特殊情形，分别称为强 Gorenstein 投射模、强 Gorenstein 内射模和强 Gorenstein 平坦模. 更进一步，文献[5]引入并研究了 n- 强 Gorenstein 投射模、n- 强 Gorenstein 内射模和 n- 强 Gorenstein 平坦模. 特别地，文献[6－8] 继续对这些模类进行了细致的研究，得到了许多很好的性质. 为了进一步刻画 Gorenstein 同调代数在一般环上的性质，文献[9] 引入了 Level 模和绝对 Clean 模的概念，这是对平坦模和内射模的自然推广，继而引入了 Gorenstein AC 投射模和 Gorenstein AC 内射模的概念.

受上述研究的启发，本文引入了强 Gorenstein AC 投射模的概念，并研究了它的同调性质，得到了当 $m\neq n$ 时，m- 强 Gorenstein AC 投射模与 n- 强 Gorenstein AC 投射模的关系.

本文中，R 是具有单位元的结合环，R-Mod 表示左 R- 模范畴.

定义 1[9] (a) 如果左 R- 模 F 有一个投射分解 $\cdots\longrightarrow P_2\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow F\longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是有限生成的，则称 F 是超有限表示模；

(b) 如果对任意的超有限表示模 F 有 $\mathrm{Tor}_1^R(F, L)=0$，则称 L 是 Level 模.

定义 2[9] 如果存在投射模的正合序列

$$P:\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow P^0\longrightarrow P^1\longrightarrow\cdots$$

使得 $M\cong\ker(P^0\longrightarrow P^1)$，且对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(P, L)$ 正合，则称左 R-模 M 是 Gorenstein AC 投射模.

① 收稿日期：2018-07-04

基金项目：国家自然科学基金项目(11761060).

作者简介：李倩倩(1993-)，女，硕士研究生，主要从事环的同调理论的研究.

定义 3[9]　如果存在正合序列 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$，其中 P_0 是投射模，使得对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用到上述短正合序列上保持正合，则称左 R-模 M 是强 Gorenstein AC 投射模.

注 1　显然，{投射模} $\subseteq$ {强 Gorenstein AC 投射模} $\subseteq$ {Gorenstein AC 投射模}.

定义 4　如果存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n-1$，$P_i$ 是投射模，使得对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用到上述正合序列上保持正合，则称左 R-模 M 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模.

用 n-SGAC-Proj(R) 表示 n- 强 Gorenstein AC 投射模类.

注 2　(i) n- 强 Gorenstein AC 投射模是 Gorenstein AC 投射模；

(ii) 对于定义 4 中的正合序列及 $0 \leqslant i \leqslant n$，$\mathrm{Im} f_i$ 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模；

(iii) 对于任意的 $n \geqslant 1$，1-强 Gorenstein AC 投射模是 n- 强 Gorenstein AC 投射模；

(iv) 设 M 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模，则对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Ext}_R^i(M, L) = 0$.

引理 1　如果 $n \mid m$，那么 n-SGAC-Proj(R) $\subseteq$ m-SGAC-Proj(R).

命题 1(i) 若 $n \mid m$，则 m-SGAC-Proj(R) $\cap$ n-SGAC-Proj(R) $=$ n-SGAC-Proj(R).

(ii) 若 $n \nmid m$ 且 $m = kn + j$，其中 k 是正整数且 $0 < j < n$，则 m-SGAC-Proj(R) $\cap$ n-SGAC-Proj(R) $\subseteq$ j-SGAC-Proj(R).

证　由引理 1，(i) 显然. 下证(ii).

由引理 1 知

$$m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap kn\text{-SGAC-Proj}(R)$$

设

$$M \in m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap kn\text{-SGAC-Proj}(R)$$

则存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1}$$

其中对任意的 $0 \leqslant i \leqslant m-1$，$P_i$ 是投射模. 对于任意的 $2 \leqslant i \leqslant m$，令 $L_i = \mathrm{Ker}(P_{i-1} \longrightarrow P_{i-2})$. 因为 M 是 kn- 强 Gorenstein AC 投射模，所以存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Q_{kn-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{2}$$

其中对任意的 $0 \leqslant i \leqslant kn-1$，$Q_i$ 是投射模. 由 Schanuel 引理知 M 与 L_{kn} 投射等价. 即存在投射模 P 和 Q，使得 $M \oplus P \cong Q \oplus L_{kn}$. 考察如下拉回图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_{kn+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & M \oplus P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{kn+1} \arrow[r] & P_{kn} \arrow[r] \arrow[d] & L_{kn} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

则 X 是投射模. 其次由如下拉回图：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_{kn+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{kn+1} \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & M\oplus P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & P \arrow[r, equal] \arrow[d] & P \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

可知 Y 是投射模. 结合正合序列(1),得到正合序列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{kn+1} \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

对任意的 Level 模 L,上述正合序列经 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 作用后仍正合. 因此 M 是 j -强 Gorenstein AC 投射模. 故 m-SGAC-Proj$(R) \cap n$-SGAC-Proj$(R) \subseteq j$-SGAC-Proj(R).

我们用(m,n)表示 m 和 n 的最大公约数.

定理 1 m-SGAC-Proj$(R) \cap n$-SGAC-Proj$(R) = (m,n)$-SGAC-Proj(R).

证 如果 $n \mid m$,那么由命题 1,结论成立. 设 $n \nmid m$ 且 $m = k_0 n + j_0$,其中 k_0 是正整数,$0 < j_0 < n$. 由命题 1(ii) 得

$$m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq j_0\text{-SGAC-Proj}(R)$$

如果 $j_0 \nmid n$ 且 $n = k_1 j_0 + j_1$,其中 $0 < j_1 < j_0$,那么由命题 1(ii) 得

$$m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq n\text{-SGAC-Proj}(R) \cap j_0\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq j_1\text{-SGAC-Proj}(R)$$

继续此过程,有限步后必存在正整数 t,使得 $j_{t+1} \mid j_t$,即 $j_t = k_{t+2} j_{t+1}$ 且$(m,n) = j_{t+1}$. 因此由命题 1(i) 得

$$j_t\text{-SGAC-Proj}(R) \cap j_{t+1}\text{-SGAC-Proj}(R) = j_{t+1}\text{-SGAC-Proj}(R)$$

所以

$$m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq j_{t+1}\text{-SGAC-Proj}(R) = (m,n)\text{-SGAC-Proj}(R)$$

另一方面,

$$(m,n)\text{-SGAC-Proj}(R) \subseteq m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R)$$

故

$$m\text{-SGAC-Proj}(R) \cap n\text{-SGAC-Proj}(R) = (m,n)\text{-SGAC-Proj}(R)$$

推论 1 n-SGAC-Proj$(R) \cap (n+1)$-SGAC-Proj$(R) = 1$-SGAC-Proj(R). 特别地,$\bigcap\limits_{n\geqslant 2} n$-SGAC-Proj$(R) =$ 1-SGAC-Proj(R).

命题 2 设 $n \geqslant 1$,M 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模,则以下各条等价:

(i) M 是投射模;

(ii) 对任意的 $i \geqslant 1$,$\mathrm{Ext}_R^i(M,M) = 0$;

(iii) 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$,$\mathrm{Ext}_R^i(M,M) = 0$.

证 (i)⇒(ii)⇒(iii) 显然. 下证(iii)⇒(i).

因为 M 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模,所以存在正合序列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

其中对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n-1$,$P_i$ 是投射模,使得对任意的 Level 模 L,$\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 作用到上述正合序列上正合. 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,取 $K_i = \mathrm{Im}(P_i \longrightarrow P_{i-1})$. 由维数转移可得

$$\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1},M) \cong \mathrm{Ext}_R^2(K_{n-2},M) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(K_1,M) \cong \mathrm{Ext}_R^n(M,M) = 0$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(K_{n-1},M) = 0$,所以 $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow K_{n-1} \longrightarrow 0$ 可裂. 因此 M 是投射模.

命题 3　对于任意的 $n\geqslant 1$，n-SGAC-Proj(R) 关于直和封闭.

设 M 是左 R-模. 用 $\mathrm{pd}(M)$ 表示 M 的投射维数.

命题 4　设左 R-模 M 是 Gorenstein AC 投射模，且 $\mathrm{pd}(M)<\infty$，则 M 是投射模.

证　设 $\mathrm{pd}(M)=1$. 则有正合序列 $0\longrightarrow Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中 Q_0,Q_1 是投射模. 因为 M 是 Gorenstein AC 投射模，所以有 $\mathrm{Ext}_R^1(M,Q_1)=0$. 因此 $0\longrightarrow Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 可裂，所以 M 是投射模.

设 $\mathrm{pd}(M)=n$. 则有正合序列 $0\longrightarrow Q_n\longrightarrow Q_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$，其中每个 Q_i 是投射模. 对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-1$，令 $K_i=\mathrm{Im}(Q_i\longrightarrow Q_{i-1})$. 由维数转移可得

$$\mathrm{Ext}_R^1(M,K_1)\cong\mathrm{Ext}_R^n(M,Q_n)=0$$

于是 $0\longrightarrow K_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow M\longrightarrow 0$ 可裂. 故 M 是投射模.

定理 2　设 M 是左 R-模，$n\geqslant 1$. 则以下各条等价：

(i) M 是 n-强 Gorenstein AC 投射模；

(ii) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射模，使得 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 1-强 Gorenstein AC 投射模；

(iii) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射模，使得 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 Gorenstein AC 投射模；

(iv) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射维数有限的模，使得 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 1-强 Gorenstein AC 投射模；

(v) 存在正合序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$，其中每个 P_i 是投射维数有限的模，使得 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 Gorenstein AC 投射模.

证　(i)⇒(ii)　设 M 是 n-强 Gorenstein AC 投射模，则存在正合序列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

其中 $0\leqslant i\leqslant 1$，P_i 是投射模，使得对任意的 Level 模 L，$\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 作用到上述序列上正合. 因此对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-1$，有正合序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Im}f_i\xrightarrow{\alpha_i}P_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_{i+1}}P_i\xrightarrow{f_i}\mathrm{Im}f_i\longrightarrow 0$$

把这些正合序列做直和，得到正合序列

$$0\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i\xrightarrow{\alpha}\bigoplus_{i=0}^n P_i\xrightarrow{f}P_{n-1}\oplus P_0\oplus\cdots\oplus P_{n-2}\longrightarrow\cdots$$

其中 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$f=\{f_n,f_0,\cdots,f_{n-1}\}$. 易得 $\mathrm{Im}f\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$，且对任意的 Level 模 L，有

$$\mathrm{Ext}_R^1(\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i,L)\cong\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Im}f_i,L)=0$$

因此 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 1-强 Gorenstein AC 投射模.

(ii)⇒(iii)⇒(v) 和(ii)⇒(iv)⇒(v) 显然. 下证(v)⇒(i).

设有正合序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$，其中对任意的 $0\leqslant i\leqslant n-1$，$P_i$ 是投射维数有限的模，使得 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 Gorenstein AC 投射模. 则对任意的 $0\leqslant i\leqslant n-1$，有正合序列 $0\longrightarrow\mathrm{Im}f_{i+1}\longrightarrow P_i\longrightarrow\mathrm{Im}f_i\longrightarrow 0$. 因为 $\bigoplus_{i=1}^n\mathrm{Im}f_i$ 是 Gorenstein AC 投射模，所以 $\mathrm{Im}f_i$ 是 Gorenstein AC 投射模. 因为 Gorenstein AC 投射模类是投射可解类，所以对任意的 $0\leqslant i\leqslant n-1$，每个 P_i 是 Gorenstein AC 投射模. 又因为 $\mathrm{pd}(P_i)<\infty$，所以对任意的 $0\leqslant i\leqslant n-1$，$P_i$ 是投射模. 因为 P_{n-1} 和 $\mathrm{Im}f_{n-1}$ 是 Gorenstein AC 投射模，所以由 $0\longrightarrow M\longrightarrow P_{n-1}\longrightarrow\mathrm{Im}f_{n-1}\longrightarrow 0$ 可知 M 是 Gorenstein AC 投射模. 因此对任意的 Level 模 L，$i\geqslant 1$，有 $\mathrm{Ext}_R^i(M,L)=0$，所以正合列

$$0\longrightarrow M\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}M\longrightarrow 0$$

经 $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用后正合. 因此 M 是 n- 强 Gorenstein AC 投射模.

注 3 对偶地，我们可以引入 n- 强 Gorenstein AC 内射模并讨论它的同调性质.

参考文献:

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Providence, Rhode Island: Amer Math Soc, 1969.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein Flat Modules [J]. 南京大学学报(数学半年刊), 1993, 10(1): 1-9.

[3] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein Injective and Projective Modules [J]. Math Z, 1995, 220(1): 611-633.

[4] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein Projective, Injective, and Flat Modules [J]. J Pure Appl Algebra, 2007, 210(2): 437-445.

[5] BENNIS D, MAHDOU N. A Generalization of Strongly Gorenstein Projective Modules [J]. J Algebra Appl, 2009(8): 219-227.

[6] YANG X Y, LIU Z K. Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules [J]. J Algebra, 2008, 320(7): 2659-2674.

[7] 叶星美，杨晓燕. n-强 F-Gorenstein 投射模 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(10): 84-88.

[8] ZHAO G Q, HUANG Z Y. n-Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules [J]. Comm Algebra, 2011, 39(8): 3044-3062.

[9] GILLESPIE J. Gorenstein Complexes and Recollements from Cotorsion Pair [J]. Advance in Math, 2016, 291: 859-911.

n-Strongly Gorenstein AC Projective Modules

LI Qian-qian, YANG Xiao-yan

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, firstly, we have introduced the notion of n-strongly Gorenstein AC projective modules, investigated homological porproties of these modules, and given the method of constructing 1-strongly Gorenstein AC projective modules from n-strongly Gorenstein AC projective modules. Secondly, we have discussed the relation between m-strongly Gorenstein AC projective modules and n-strongly Gorenstein AC projective modules whenever m not equal n. At last, we have proved that arbitrary self-orthognal n-strongly AC Gorenstein projective module is a projective module.

Key words: Level module; Gorenstein AC projective module; n-strongly Gorenstein AC projective module

责任编辑 廖 坤 崔玉洁