

解析 Morrey 空间到 Zygmund 空间上的 Stević-Sharma 算子^①

朱克超, 赵姣珍

贵州民族大学 人文科技学院, 贵阳 550025

摘要: 研究了解析 Morrey 空间到 Zygmund 空间上 Stević-Sharma 算子的有界性与紧性. 分别给出 Morrey 空间到 Zygmund 空间上 Stević-Sharma 算子是有界算子和紧算子的充分必要条件. 作为推论, 得到 Morrey 空间到 Zygmund 空间上的加权复合算子的有界性及紧性.

关键词: Morrey 空间; Zygmund 空间; Stević-Sharma 算子; 加权复合算子; 有界性; 紧性

中图分类号: O174.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2018)12-0041-07

设 $D = \{z: |z| < 1\}$ 是复平面上的单位圆盘, ∂D 表示圆盘边界, $H(D)$ 表示 D 上的解析函数的全体. 对于任意弧 $I \subset \partial D$, 记 $S(I) = \{z \in D: 1 - I \leq |z| < 1, |z|^{-1}z \in I\}$, 其中 $|I| = (2\pi)^{-1} \int_I |d\zeta|$ 表示 I 的正规化弧长, 则称 $S(I)$ 为基于 $I \subset \partial D$ 的 Carleson 盒. 显然, 如果 $I = \partial D$, 则 $S(I) = D$. 由 H^2 中满足条件 $\sup_{I \subset \partial D} \left\{ |I|^{-\lambda} \int_I |f(\zeta) - f_I|^2 (2\pi)^{-1} |d\zeta| \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$ 的全体函数构成的空间称为 Morrey 空间, 记为 $\mathcal{L}^{2,\lambda}(D)$, 其中 $0 < \lambda \leq 1$, H^2 是由满足 $\sup_{0 < r < 1} (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty$ 的全体解析函数构成的空间. 从文献[1]的定理 3.1 我们可以定义 Morrey 空间中的函数 f 的模为

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} = |f(0)| + \sup_{I \subset \partial D} \left\{ |I|^{-\lambda} \int_{S(I)} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2) dA(z) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

也可以等价地写为

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \approx |f(0)| + \sup_{a \in D} \left\{ (1 - |a|^2)^{1-\lambda} \int_D |f'(z)|^2 (1 - |\sigma_a(z)|^2) dA(z) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

其中 $a \in D$, $\sigma_a(z) = \frac{a - \bar{z}}{1 - \bar{a}z}$, $z \in D$ 是单位圆盘上的莫比乌斯变换.

在 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}(D)$ 中, 满足条件

$$\lim_{|I| \rightarrow 0} \left\{ |I|^{-\lambda} \int_I |f(\zeta) - f_I|^2 (2\pi)^{-1} |d\zeta| \right\}^{\frac{1}{2}} = 0$$

的函数构成的空间被称为小 Morrey 空间, 记为 $\mathcal{L}_0^{2,\lambda}(D)$.

众所周知, $\mathcal{L}^{2,1}(D) = \text{BMOA}$, 若 $0 < \lambda < 1$, 则 $\text{BMOA} \subset \mathcal{L}^{2,\lambda}(D)$, 但 $\text{BMOA} \neq \mathcal{L}^{2,\lambda}(D)$.

由满足条件 $z(f) = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < +\infty$ 的解析函数全体构成的 Zygmund 空间记为 Z . 由文献[2]的定理 5.3 可知, $f \in Z$ 当且仅当 f 在闭圆盘 $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$ 上连续且其边界函数 $f(e^{i\theta})$ 满足

① 收稿日期: 2018-04-01

基金项目: 贵州省科技厅贵州省科学技术基金项目(黔科合 J 字[2014]2095 号).

作者简介: 朱克超(1981-), 男, 讲师, 主要从事复分析的研究.

$$\sup_{h>0, \theta \in [0, 2\pi]} \frac{|f(e^{i(\theta+h)}) + f(e^{i(\theta-h)}) - 2f(e^{i\theta})|}{h} < +\infty$$

如果 $f \in Z$, 且满足 $\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0$, 则称 f 属于小 Zygmund 空间 Z_0 .

赋予模 $\|f\|_Z = |f(0)| + |f'(0)| + z(f)$, 容易验证 Z 是 Banach 空间. 多项式在 Z 的子空间 Z_0 中按模稠密. 更多关于 Zygmund 空间及其上面一些算子的知识, 可参考文献[3-4]等.

Morrey 空间首先被文献[5]介绍, 之后许多数学工作者进行了相关研究, 得到了很多成果(比如文献[1, 6-9]及其参考文献).

令 $\psi \in H(D)$, φ 是 D 上的解析自映射. $H(D)$ 上的复合算子、乘积算子和微分算子分别定义如下:

$$(C_\varphi f)(z) = (f \circ \varphi)(z) = f(\varphi(z)) \quad z \in D$$

$$(M_\psi f)(z) = \psi(z)f(z) \quad z \in D$$

$$Df(z) = f'(z) \quad z \in D$$

微分算子是很多解析函数空间上无界线性算子的典型例子. 在对这 3 类算子进行大量研究后, 部分数学工作者对它们的乘积产生了兴趣. 对于复合算子和微分算子乘积的研究, 可见文献[4, 10-12]等. 为了统一研究乘积型算子和加权复合算子, S. Stević 和 A. Sharma 引入了一种新算子, 我们称为 Stević-Sharma 算子:

对于 $\psi_1(z), \psi_2(z) \in H(D)$ 和 D 上的解析自映射 φ , 记

$$T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f(z) = \psi_1(z)f(\varphi(z)) + \psi_2(z)f'(\varphi(z))$$

称 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}$ 为 Stević-Sharma 算子. 文献[13-14]首先对该算子进行了研究. 接着其他作者研究了该算子(见文献[15-16]).

受上述文献的启发, 本文旨在讨论 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2, \lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上算子 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}$ 的有界性及紧性.

本文中 C 是独立于基本变量的正常数, 不同的地方出现可表示不同的常数. 记号 $A \approx B$ 表示存在正数 C , 使得

$$\frac{B}{C} \leq A \leq CB$$

1 预备知识

引理 1 设 $0 < \lambda < 1$, 如果 $f \in \mathcal{L}^{2, \lambda}$, 则对任意 $z \in D$, 有

$$|f(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}} (1 - |z|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} \quad (1)$$

$$|f'(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}} (1 - |z|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} \quad (2)$$

$$|f''(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}} (1 - |z|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} \quad (3)$$

$$|f'''(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}} (1 - |z|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}} \quad (4)$$

证 (1), (2) 式的证明可见文献[9]的引理 2.5. 对任意 $f \in \mathcal{L}^{2, \lambda}$, 固定 $z \in D$, 并取 $\rho = \frac{1+|z|}{2}$, 用柯西积分公式作用于函数 f'' , 则有

$$\begin{aligned} |f''(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f'(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \right| \leq \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}}}{(1-|z|^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{|\rho e^{i\theta} - z|^2} = \\ &= \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}}}{(1-|z|^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}} \cdot \frac{\rho}{\rho^2 - |z|^2} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda}} (1 - |z|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} \end{aligned}$$

因此(3)式成立. (4)式的证明类似.

为了证明 Stević-Sharma 算子的紧性, 我们需要如下的引理 2, 其证明类似于文献[17]中的引理 1.

引理 2 令 φ 是 D 上的解析自映射, $\psi_1(z), \psi_2(z) \in H(D)$, 解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2, \lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的算子 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2, \lambda} \rightarrow Z$ 是紧算子的充分必要条件是: 对于 Morrey 空间中满足在 D 的任意紧子集一致收敛于 0 的每一个序列 $\{f_j\}$, 都有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_j\|_{\mathcal{L}^{2, \lambda} \rightarrow Z} = 0$$

引理 3 令 $H_i(z) = (1 - |w|^2)^i (1 - \overline{wz})^{-\frac{2i+1-\lambda}{2}}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), $w \in D$, 则 $H_i(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$, 且有

$$\sup_{w \in D} \|H_i(z)\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C < \infty$$

其中 C 只依赖于 i, λ .

证 事实上, 由文献[9]的引理 3.1, 计算得

$$\begin{aligned} \|H_i(z)\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}}^2 &\leq C \left[1 + \sup_{a \in D} (1 - |a|^2)^{1-\lambda} \int_D \frac{(1 - |w|^2)^i |\overline{w}|^{\frac{2i+1-\lambda}{2}}}{|1 - \overline{wz}|^{2i+3-\lambda}} |\sigma_a(z)| dA(z) \right] \leq \\ &C \left[1 + \sup_{a \in D} (1 - |a|^2)^{2-\lambda} \frac{(1 - |w|^2)^{2i}}{(1 - |w|^2)^{2i+3-\lambda-1-2}} \frac{1}{|1 - \overline{aw}|^2} \right] \leq \\ &C \left[1 + \sup_{a \in D} (1 - |a|^2)^{2-\lambda} \frac{(1 - |w|^2)^\lambda}{(1 - |a|)^{2-\lambda} (1 - |w|)^\lambda} \right] \leq C \end{aligned}$$

2 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的算子 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}$ 的有界性及紧性

为了方便起见, 我们记:

$$\begin{aligned} L_1(z) &= \psi_1''(z) & L_2(z) &= \psi_1(z)\varphi''(z) + 2\psi_1'(z)\varphi'(z) + \psi_2''(z) \\ L_3(z) &= \psi_1(z)(\varphi'(z))^2 + 2\psi_2'(z)\varphi'(z) + \psi_2(z)\varphi''(z) & L_4(z) &= \psi_2(z)(\varphi'(z))^2 \end{aligned}$$

定理 1 设 $\varphi(z)$ 是 D 上的解析自映射, $\psi_1(z), \psi_2(z) \in H(D)$. 解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的算子 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 有界当且仅当下列条件成立:

$$M_1 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_1(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} < \infty \quad (5)$$

$$M_2 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_2(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} < \infty \quad (6)$$

$$M_3 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_3(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} < \infty \quad (7)$$

$$M_4 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_4(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}} < \infty \quad (8)$$

证 充分性 假设 $f \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$, 且(5),(6),(7),(8)式成立. 由引理 1, 有

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2) |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f)''(z)| &= \\ (1 - |z|^2) |L_1(z)f(\varphi(z)) + L_2(z)f'(\varphi(z)) + L_3(z)f''(\varphi(z)) + L_4(z)f'''(\varphi(z))| &\leq \\ (1 - |z|^2) (|L_1(z)f(\varphi(z))| + |L_2(z)f'(\varphi(z))| + |L_3(z)f''(\varphi(z))| + |L_4(z)f'''(\varphi(z))|) &\leq \\ C(1 - |z|^2) ((1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} L_1(z) + (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} L_2(z)) \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &+ \\ C(1 - |z|^2) ((1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} L_3(z) + (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}} L_4(z)) \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &\leq \\ C(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) \|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &< \infty \end{aligned}$$

经计算, 有

$$\begin{aligned} |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f(0))| + |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f'(0))| &= |\psi_1(0)f(\varphi(0)) + \psi_2(0)f'(\varphi(0))| + \\ |\psi_1(0)f'(\varphi(0))\varphi(0) + \psi_1'(0)f(\varphi(0)) + \psi_2'(0)f'(\varphi(0)) + \psi_2(0)f''(\varphi(0))\varphi(0)| &\leq \\ \left[\frac{|\psi_1'(0)| + |\psi_1(0)|}{(1 - |\varphi(0)|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} + \frac{|\psi_2(0)| + |\psi_1(0)\varphi'(0)| + |\psi_2'(0)|}{(1 - |\varphi(0)|^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}} + \frac{|\psi_2(0)\varphi'(0)|}{(1 - |\varphi(0)|^2)^{\frac{5-\lambda}{2}}} \right] &\|f\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty \end{aligned}$$

故而有

$$|(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f(0))| + |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f'(0))| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f)''(z)| < \infty$$

必要性 假设 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 有界, 利用函数 $f(z) = 1$, $f(z) = z$, $f(z) = \frac{z^2}{2}$ 及 $f(z) = \frac{z^3}{3}$ 都属于 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 的事实, 分别得:

$$K_1 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_1(z)| < \infty \quad (9)$$

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_1(z)\varphi(z) + L_2(z)| < \infty \quad (10)$$

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| L_1(z) \frac{(\varphi(z))^2}{2} + L_2(z) \varphi(z) + L_3(z) \right| < \infty \quad (11)$$

$$\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| L_1(z) \frac{(\varphi(z))^3}{3} + L_2(z) (\varphi(z))^2 + 2L_3(z) \varphi(z) + L_4(z) \right| < \infty \quad (12)$$

由(9),(10) 式及 $\varphi(z)$ 的有界性, 得

$$K_2 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_2(z)| < \infty \quad (13)$$

由(9),(11),(13) 式及 $\varphi(z)$ 的有界性, 得

$$K_3 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_3(z)| < \infty \quad (14)$$

由(9),(12),(13),(14) 式及 $\varphi(z)$ 的有界性, 得

$$K_4 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_4(z)| < \infty \quad (15)$$

对于 $w \in D$, 且 $\frac{1}{2} < |w| < 1$, 取测试函数

$$f_w(z) = k_1 H_1 + k_2 H_2 + k_3 H_3 + k_4 H_4$$

$$\text{其中 } k_1 = \frac{(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(3-\lambda)}, k_2 = \frac{-3(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)}, k_3 = \frac{3(9-\lambda)}{2}, k_4 = -\frac{7-\lambda}{2}.$$

由引理 3 有 $f_w(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$, 且 $\sup_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \|f_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C$. 直接计算得:

$$\begin{aligned} f_w(w) &= \frac{24}{(3-\lambda)(5-\lambda)} (1 - |w|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} \\ f'_w(w) &= 0 \quad f''_w(w) = 0 \quad f'''_w(w) = 0 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} C \|f_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &\geq \|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z} \geq \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f''_w(z)| = \\ &\sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |L_1(z) f_w(\varphi(z)) + L_2(z) f'_w(\varphi(z)) + \\ &L_3(z) f''_w(\varphi(z)) + L_4(z) f'''_w(\varphi(z))| \end{aligned} \quad (16)$$

对 $t \in D$, 且 $\frac{1}{2} < |\varphi(t)| < 1$, 令 $w = \varphi(t)$, 则由(16) 式可得

$$\begin{aligned} C \|f_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} &\geq \|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z} \geq \sup_{\frac{1}{2} < |\varphi(t)| < 1} (1 - |t|^2) |L_1(t) f_{\varphi(t)}(\varphi(t))| \geq \\ C \sup_{\frac{1}{2} < |\varphi(t)| < 1} (1 - |t|^2) |L_1(t)| (1 - |\varphi(t)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} \end{aligned}$$

因此有

$$\sup_{\frac{1}{2} < |\varphi(t)| < 1} (1 - |t|^2) |L_1(t)| (1 - |\varphi(t)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} < \infty \quad (17)$$

对满足 $|\varphi(t)| \leq \frac{1}{2}$ 的 $t \in D$, 我们有

$$\sup_{|\varphi(t)| \leq \frac{1}{2}} (1 - |t|^2) |L_1(t)| (1 - |\varphi(t)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1-\lambda}{2}} \sup_{|\varphi(t)| \leq \frac{1}{2}} (1 - |t|^2) |L_1(t)| < \infty \quad (18)$$

由(17) 式及(18) 式知 (5) 式成立.

对于 $w \in D$, 且 $\frac{1}{2} < |w| < 1$, 分别取测试函数:

$$\begin{aligned} F_w(z) &= -\frac{(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)} H_1 + \frac{(17-3\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)} H_2 + \frac{3\lambda-25}{2} H_3 + \frac{7-\lambda}{2} H_4 \\ g_w(z) &= \frac{\lambda-9}{2} H_1 + \frac{25-3\lambda}{2} H_2 + \frac{3\lambda-23}{2} H_3 + \frac{7-\lambda}{2} H_4 \end{aligned}$$

及

$$h_w(z) = -H_1 + 3H_2 - H_3 + H_4$$

则:

$$F_w(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda} \quad g_w(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda} \quad h_w(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$$

且有:

$$\sup_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \|F_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C \quad \sup_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \|g_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C \quad \sup_{\frac{1}{2} < |w| < 1} \|h_w\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C$$

直接计算分别得:

$$\begin{aligned} F_w(w) &= 0 & F'_w(w) &= 4(5-\lambda)^{-1}\overline{w}(1-|w|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} \\ F''_w(w) &= 0 & F'''_w(w) &= 0 & g'_w(w) &= 0 & g_w(w) &= 0 \\ g''_w(w) &= -2\overline{w}^2(1-|w|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} & g'''_w(w) &= 0 \end{aligned}$$

及

$$h_w(w) = 0 \quad h'_w(w) = 0 \quad h''_w(w) = 0 \quad h'''_w(w) = 6\overline{w}^3(1-|w|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}}$$

分别对 $F_w(z), g_w(z)$ 和 $h_w(z)$ 作类似于证明定理 1 中(5)式时的讨论, 并分别借助于(13), (14) 和(15) 式, 可得定理 1 的(6), (7), (8) 式.

定理 2 设 $\varphi(z)$ 是 D 上的解析自映射, $\phi_1(z), \phi_2(z) \in H(D)$. 解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的算子 $T_{\phi_1, \phi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \longrightarrow Z$ 有界, 则 $T_{\phi_1, \phi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \longrightarrow Z$ 是紧算子的充要条件是下列条件成立:

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |L_1(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} = 0 \quad (19)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |L_2(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} = 0 \quad (20)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |L_3(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1-|z|^2) |L_4(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}} = 0 \quad (22)$$

证 充分性 假设(19), (20), (21) 及(22) 式成立, 令序列 $\{f_n\}$ 满足 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} < \infty$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 f_n 在 D 的任意紧子集上一致收敛于 0. 由假设, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得当 $\eta < |\varphi(z)| < 1$ 时, 有

$$(1-|z|^2) |L_1(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} < \varepsilon \quad (23)$$

$$(1-|z|^2) |L_2(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} < \varepsilon \quad (24)$$

$$(1-|z|^2) |L_3(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} < \varepsilon \quad (25)$$

$$(1-|z|^2) |L_4(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{7-\lambda}{2}} < \varepsilon \quad (26)$$

因为 $T_{\phi_1, \phi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \longrightarrow Z$ 有界, 由定理 1 的证明过程可知

$$K_i = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |L_i(z)| < \infty \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (27)$$

令 $\Omega = \{z \in D: |\varphi(z)| < \eta\}$, 联立 (23) – (27) 式, 有

$$\|T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \longrightarrow Z} = |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n(0)| + |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f'_n(0)| + \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f''_n(z)| =$$

$$|T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n(0)| + |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f'_n(0)| + \sup_{z \in D} (1-|z|^2) \left| \sum_{i=1}^4 L_i(z) f_n^{(i-1)}(\varphi(z)) \right| \leq$$

$$|T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n(0)| + |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f'_n(0)| + \sup_{z \in D} (1-|z|^2) \sum_{i=1}^4 |L_i(z) f_n^{(i-1)}(\varphi(z))| +$$

$$\sup_{z \in D-\Omega} (1-|z|^2) \sum_{i=1}^4 |L_i(z) f_n^{(i-1)}(\varphi(z))| \leq$$

$$|T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n(0)| + |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f'_n(0)| + \sum_{i=1}^4 K_i \sup_{z \in \Omega} |f_n^{(i-1)}(\varphi(z))| +$$

$$\sum_{i=1}^4 C \|f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \sup_{z \in D-\Omega} (1-|z|^2) |L_i(z)| (1-|\varphi(z)|^2)^{-\frac{2i-1-\lambda}{2}} \leq$$

$$|T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f_n(0)| + |T_{\phi_1, \phi_2, \varphi} f'_n(0)| + \sum_{i=1}^4 K_i \sup_{z \in \Omega} |f_n^{(i-1)}(\varphi(z))| + 4C\varepsilon \|f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \quad (28)$$

其中:

$$|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_n(0)| = |\psi_1(0)f_n(\varphi(0)) + \psi_2(0)f'_n(\varphi(0))|$$

$$|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f'_n(0)| = |\psi_1(0)f'_n(\varphi(0))\varphi'(0) + \psi'_1(0)f_n(\varphi(0)) + \psi'_2(0)f'_n(\varphi(0)) + \psi_2(0)f''_n(\varphi(0))\varphi'(0)|$$

因为 f'_n 在 D 的任意紧子集上一致收敛于 0, 由柯西积分公式可知 f'_n, f''_n, f'''_n 在 D 的任意紧子集上一致收敛于 0, 在(28)式中令 $n \rightarrow \infty$, 并注意到 ε 为任意小正数这一事实, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z} = 0$, 由引

理 2 知 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 为紧算子.

必要性 假设 $T_{\psi_1, \psi_2, \varphi}: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 为紧算子. 令 $\{z_n\}$ 为 D 中满足 $n \rightarrow \infty$ 时 $|\varphi(z_n)| \rightarrow 1$ 的任意序列.

记 $l_i(x) = -(1 - |\varphi(z_n)|^2)^i (1 - \overline{\varphi(z_n)}z)^{\frac{2i+1-\lambda}{2}}$, 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 取测试函数

$$f_n(z) = \frac{(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(3-\lambda)}l_1(x) - \frac{3(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)}l_2(x) + \frac{3(9-\lambda)}{2}l_3(x) - \frac{(7-\lambda)}{2}l_4(x)$$

由定理 1 知 $f_n(z) \in \mathcal{L}^{2,\lambda}$, 且 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda}} \leq C < \infty$, 直接计算可得:

$$f'_n(\varphi(z_n)) = \frac{24}{(3-\lambda)(5-\lambda)}(1 - |\varphi(z_n)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}}$$

$$f_n(\varphi(z_n)) = 0 \quad f''_n(\varphi(z_n)) = 0 \quad f'''_n(\varphi(z_n)) = 0$$

$f_n(z)$ 在 D 的任意紧子集上一致收敛于 0, 由引理 2, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z} = 0$.

$$\|T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_n\|_{\mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z} \geq C(1 - |z_n|^2) |(T_{\psi_1, \psi_2, \varphi} f_n)''(z_n)| = C(1 - |z_n|^2) \left| \sum_{i=1}^4 L_1(z_n) f_n^{(i-1)}(\varphi(z_n)) \right| =$$

$$C(1 - |z_n|^2) |\psi'_1(z_n) f_n(\varphi(z_n))| = C(1 - |z_n|^2) |\psi'_1(z_n)| (1 - |\varphi(z_n)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}}$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - |z_n|^2) |\psi'_1(z_n)| (1 - |\varphi(z_n)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} = 0$$

即 $\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) \frac{|\psi'_1(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}} = 0$, (19) 式得证.

分别取测试函数:

$$F_n(z) = -\frac{(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)}l_1(x) + \frac{3(7-\lambda)(9-\lambda)}{2(5-\lambda)}l_2(x) + \frac{3\lambda-25}{2}l_3(x) + \frac{7-\lambda}{2}l_4(x)$$

$$g_n(z) = \frac{\lambda-9}{2}l_1(x) + \frac{25-3\lambda}{2}l_2(x) + \frac{3\lambda-23}{2}l_3(x) + \frac{7-\lambda}{2}l_4(x)$$

及

$$h_n(z) = -l_1(x) + 3l_2(x) - l_3(x) + l_4(x)$$

作类似于定理 2 中(19)式的证明, 我们可得定理 2 的(20), (21), (22) 式.

特别地, 若在定理 1、定理 2 中分别取 $\psi_1 = u$, $\psi_2 = 0$, 可得下列的推论 1、推论 2:

推论 1 设 φ 是 D 上的解析自映射, $u \in H(D)$. 解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的加权复合算子 $uC_\varphi: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 有界当且仅当下列条件成立:

$$M_1 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |u''(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} < \infty \quad (29)$$

$$M_2 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |u(z)\varphi''(z) + 2u'(z)\varphi'(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} < \infty \quad (30)$$

$$M_3 = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |u(z)(\varphi'(z))^2| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} < \infty \quad (31)$$

推论 2 设 φ 是 D 上的解析自映射, $u \in H(D)$. 解析 Morrey 空间 $\mathcal{L}^{2,\lambda}$ 到 Zygmund 空间 Z 上的加权复合算子 $uC_\varphi: \mathcal{L}^{2,\lambda} \rightarrow Z$ 为紧算子当且仅当下列条件成立:

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |u''(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{1-\lambda}{2}} = 0 \quad (32)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |u(z)\varphi''(z) + 2u'(z)\varphi'(z)| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{3-\lambda}{2}} = 0 \quad (33)$$

$$\lim_{|\varphi(z)| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |u(z)(\varphi'(z))^2| (1 - |\varphi(z)|^2)^{-\frac{5-\lambda}{2}} = 0 \quad (34)$$

参考文献:

- [1] WULAN H, ZHOU J Z. Q_K and Morrey Type Spaces [J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2013, 38(1): 193—207.
- [2] DUREN P L. Theory of H^p Spaces [M]. New York: Academic Press, 1970: 58—60.
- [3] COLONNA F, LI S X. Weighted Composition Operators from H^∞ into the Zygmund Spaces [J]. Complex Analysis & Operator Theory, 2013, 7(5): 1495—1512.
- [4] LI H Y, MA T S, GUO Z T. Generalized Composition Operators from Zygmund Type Spaces to Q_K Spaces [J]. Math Ineq, 2015, 9(2): 425—435.
- [5] MORREY C B. On the Solution of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1938, 43(1): 126—166.
- [6] WU Z J, XIE C P. Q Spaces and Morrey Spaces [J]. Funct Anal, 2003, 201(1): 282—297.
- [7] GU D G. Weighted Composition Operators from Analytic Morrey Spaces into Bloch-Type Spaces [J]. Math Anal, 2014, 5(4): 18—25.
- [8] PEETRE J. On the Theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ Spaces [J]. Funct Anal, 1964(4): 71—87.
- [9] LI P T, LIU J M, LOU Z J. Integral Operators on Analytic Morrey Spaces [J]. Sci Chi Math, 2014, 57(9): 1961—1974.
- [10] OHNO S. Products of Composition and Differentiation between Hardy Spaces [J]. Bull Austr Math Soc, 2006, 73(2): 235—243.
- [11] STEVIĆ S. Weighted Differentiation Composition Operators from Mixed-Norm Spaces to Weighted-Type Spaces [J]. Appl Math Comput, 2009, 211(1): 222—233.
- [12] STEVIĆ S. Characterizations of Composition Followed by Differentiation Between Bloch-Type Spaces [J]. Appl Math Comput, 2011, 218(8): 4312—4316.
- [13] STEVIĆ S, SHARMA A K, BHAT A. Products of Multiplication, Composition and Differentiation Operators on Weighted Bergman Space [J]. Appl Math Comput, 2011, 217(20): 8115—8125.
- [14] STEVIĆ S, SHARMA A K, BHAT A. Essential Norm of Products of Multiplication, Composition and Differentiation Operators on Weighted Bergman Spaces [J]. Appl Math Comput, 2011, 218(6): 2386—2397.
- [15] ZHANG F, LIU Y M. On the Compactness of the Stević-Sharma Operator on the Logarithmic Bloch Spaces [J]. Math Ineq Appl, 2016, 19(2): 625—642.
- [16] ZHANG F, LIU Y M. Products of Multiplication, Composition and Differentiation Operators from Mixed-Norm Spaces to Weighted-Type Spaces [J]. Taiwan Math, 2014, 18(6): 1927—1940.
- [17] MADIGAN K, MATHESON A. Compact Composition Operators on the Bloch Space [J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347(7): 2679—2687.

On Stević-Sharma Operator from Analytic Morrey Spaces to Zygmund Spaces

ZHU Ke-chao, ZHAO Jiao-zhen

College of Humanities Sciences, Guizhou University for Nationalities, Guiyang 550025, China

Abstract: In this paper, the boundedness and compactness of the Stević-Sharma operators from analytic Morrey sapces to Zygmund space are characterized. The sufficient and necessary conditions for the boundedness and compactness of the Stević-Sharma operator are obtained. As a corollary, the conditions of boundedness and compactness of weighted composition operators are given.

Key words: Morrey space; Zygmund space; Stević-Sharma operator; weighted composition operator; boudedness; compactness