第 43 卷 第 12 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2018 年 12 月
Vol. 43 No. 12　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Dec. 2018

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2018.12.010

Banach 空间上的有界算子的谱估计[①]

傅欣怡[1]，　汪　为[2]

1. 西南财经大学 经济数学学院，成都 611130；2. 四川大学 数学学院，成都 610065

摘要：首先证明 Banach 空间上关于双线性泛函的 Lax-Milgram 定理的一个变化形式，然后利用此结果研究了 Banach 空间上的有界线性算子的谱估计，我们把以往关于 Hilbert 空间上的自共轭算子的一个谱定理推广到了 Banach 空间上.

关　键　词：Lax-Milgram 定理；有界线性算子；谱

中图分类号：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2018)12-0048-03

Hilbert 空间是有限维欧式空间向无限维空间的自然推广，Banach 空间是 Hilbert 空间的自然推广，因此定义在 Hilbert 空间或 Banach 空间上的算子是有限维矩阵的自然推广. 我们知道，矩阵的特征值理论是很重要的，因此弄清 Hilbert 空间或 Banach 空间上的某些算子的谱理论也是很重要的[1-10].

定义 1[1]　设 E 是实 Banach 空间，用 $L(E)$ 表示从 E 到 E 的有界线性算子空间，设 $T \in L(E)$，定义 T 的预解集为

$$\rho(T) = \{\lambda \in R: (T - \lambda I) \text{ 是从 } E \text{ 到 } E \text{ 上的双射}\}$$

T 的谱集 $\sigma(T)$ 定义为 $\rho(T)$ 的补集，$\sigma(T) = R \backslash \rho(T)$

已知的有关经典定理有：

定理 1[1]　设 $T \in L(E)$，则 $\sigma(T)$ 是 R 中的紧集且有包含关系 $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

定理 2[1]　设 H 是实 Hilbert 空间，$T \in L(H)$ 且自共轭：

$$(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall\, u, v \in H$$

则 $\sigma(T) \subset [m, M]$，其中：

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\| = 1}} (Tu, u) \qquad M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\| = 1}} (Tu, u)$$

本文试图应用著名的关于双线性泛函的 Lax-Milgram 定理的一个变化来推广定理 2，我们将定理 2 推广到 Banach 空间，我们有：

定理 3　设 X 是实 Banach 空间，$T \in L(X)$ 且自共轭，则 $\sigma(T) \subset [m, M]$.

为了证明定理 3，我们需要用到经典的 Lax-Milgram 定理以及一个变化的形式，为此先给出双线性对称连续强制泛函的定义：

定义 2[1]　设 E 是实 Banach 空间，$a(u, v): E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$，若 a 满足以下 2 个条件：

(a) $a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v)$；

(b) $a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 a(u, v_1) + \lambda_2 a(u, v_2)$.

则称 a 满足双线性性；

进一步，若 $\forall\, u, v \in E$，$a(u, v) = a(v, u)$，则称 a 是对称的；

---

① 收稿日期：2018-04-10

基金项目：国家自然科学基金项目(11671278).

作者简介：傅欣怡(1997-)，女，硕士研究生，主要从事金融数学的研究.

若存在 $c>0$，使得 $\forall u,v\in E$，有 $|a(u,v)|\leqslant c\|u\|\cdot\|v\|$，则称 a 是有界的或连续的；

若存在 $\alpha>0$，使得 $\forall u\in E$，有 $|a(u,u)|\geqslant\alpha\|u\|^2$，则称 a 是强制的.

引理 1(Lax-Milgram 定理[1])　设 H 是 Hilbert 空间，$a(u,v)$：$H\times H\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续强制双线性泛函，则对任意给定的 $\varphi\in H^*$，存在 $u\in H$，使得 $a(u,v)=\varphi(v)(\forall v\in H)$.

引理 2(Ciarlet 定理[2])　设$(V,\|\cdot\|)$是 Banach 空间，a：$V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ 是双线性对称的连续强制泛函，l：$V\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续线性泛函，令 J：$V\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-l(v)\qquad\forall v\in V$$

设 U 是 V 的闭子空间，则存在唯一的 $u\in U$，使得 $J(u)=\inf\limits_{v\in U}J(v)$，这也等价于 $a(u,v)=l(v)(\forall v\in U)$.

基于上述经典的 Lax-Milgram 定理，我们给出一个新的引理：

引理 3　设 X 是 Banach 空间，a：$X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$ 是连续、强制、对称双线性的泛函，设 A：$X\longrightarrow X$ 是有界线性自共轭算子，若 $a(Au,v)=\tilde{a}(u,v)$ 仍在 X 上强制，则 A 是 X 上的正则算子.

证　(i) A 必为单射.

反证法. 设存在 $\tilde{u}\neq 0$，使得 $A\tilde{u}=0$，由于 a 是双线性的，故有 $a(A\tilde{u},\tilde{u})=0$，又由 $\tilde{a}$ 强制，有

$$\tilde{a}(\tilde{u},\tilde{u})=a(A\tilde{u},\tilde{u})\geqslant\alpha\|\tilde{u}\|^2$$

故 $\tilde{u}=0$，这与假设 $\tilde{u}\neq 0$ 矛盾.

(ii) A 必为满射.

即要证 $\forall\bar{v}\in X$，存在 $\bar{u}$，使得 $A\bar{u}=\bar{v}$. 令 $\varphi(v)=a(\bar{v},v)$，由 a 的双线性性及连续性知，φ 关于 v 是线性连续泛函. 又由于 A 是线性自共轭有界算子，故 $a(Au,v)=a(u,v)$ 是线性对称有界泛函. 又因 $a(Au,v)$ 是强制的，故对 $\tilde{a}$ 应用 Lax-Milgram 定理知，存在 $\bar{u}\in X$，使得

$$\tilde{a}(\bar{u},v)=a(A\bar{u},v)=a(\bar{v},v)$$

即

$$a(A\bar{u}-\bar{v},v)=0\qquad\forall v\in X$$

可选取 $v=A\bar{u}-\bar{v}$，并由 a 的强制性可知 $A\bar{u}-\bar{v}=0$，即 $A\bar{u}=\bar{v}$. 又由于 $\bar{v}$ 是任意的，故 A 为满射.

由 Banach 逆算子定理可知 A^{-1} 有界，故 A 为正则算子.

定理 3 的证明　只需证明当 $\lambda>M$ 或 $\lambda<m$ 时，$\lambda\in\rho(T)$，即 $\lambda I-T$ 为正则算子.

令

$$a(u,v)=((\lambda I-T)u,v)=(\lambda u-Tu,v)$$

显然 $a(u,v)$ 是双线性对称连续(有界)泛函. 现证 a 是强制的. $\forall u,v\in X$，$u,v\neq 0$，有：

$$a(u,v)=\|u\|\cdot\|v\|\cdot\left(\lambda\left(\frac{u}{\|u\|}\right)-T\left(\frac{u}{\|u\|}\right),\frac{v}{\|v\|}\right)$$

$$a(u,u)=\|u\|^2\cdot\left[\lambda\frac{(u,u)}{\|u\|^2}-\left(T\left(\frac{u}{\|u\|}\right),\frac{u}{\|u\|}\right)\right]\geqslant$$

$$\|u\|^2\cdot[\lambda-\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)]=(\lambda-M)\cdot\|u\|^2$$

即当 $\lambda>M$ 时，a 是强制的.

下证当 $\lambda<m$ 时，$-a$ 也是强制的. 事实上，类似于上面的证明，我们有

$$a(u,u)=\|u\|^2\cdot\left[\lambda-\left(T\left(\frac{u}{\|u\|}\right),\frac{u}{\|u\|}\right)\right]\leqslant$$

$$\|u\|^2\cdot[\lambda-\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)]=(\lambda-m)\cdot\|u\|^2\to-\infty\qquad\|u\|\to+\infty$$

故

$$-a(u,u)\to+\infty\qquad\|u\|\to+\infty$$

且有

$$|a(u,u)|\geqslant|\lambda-m|\cdot\|u\|^2\qquad\forall u\in X$$

综上所述，当 $\lambda>M$ 或 $\lambda<m$ 时，a 均满足强制性条件. 由引理 1 知 $\lambda\in\rho(T)$.

参考文献:

[1] BREZIS H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations [M]. New York: Springer, 2011.
[2] CIARLET P G. Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications [M]. United States: SIAM, 2013.
[3] CONWAY J B. A Course in Functional Analysis [M]. 2th ed. New York: Springer, 1990.
[4] LAX P D, MILGRAM A N. Parabolic Equations [J]. Annals of Mathematics Studies, 1954, 33: 167-190.
[5] LIONS J L, STAMPACCHIA G. Variational Inequality [J]. Comm on Pure and Appl Math, 1967, 20: 493-519.
[6] RUDIN W. Functional Analysis [M]. New York: McGraw-Hill, 1973.
[7] STEIN E, SHAKARCHI R. Functional Analysis [M]. Princeton: Princeton Univ Press, 2011.
[8] 江泽坚,孙善利. 泛函分析 [M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2006.
[9] 夏道行,吴卓人,严邵宗,等. 实变函数论与泛函分析下册 [M]. 2版. 北京:高等教育出版社,1985.
[10] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义上册 [M]. 北京:北京大学出版社,1987.

Spectrum Estimate of Bounded Operator on Banach Space

FU Xin-yi[1], WANG Wei[2]

1. Department of Mathematics and Economics, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China

Abstract: We've firstly proved a variant of Lax-Milgram Theorem on bilinear functional on Banach space, then with this result, we've studied the spectrum estimate of bounded linear operator on Banach space, and we've generalized a classical spectrum theorem on the self-adjoint operator defined on Hilbert space to Banach space.

Key words: Lax-Milgram Theorem; bounded linear operator; spectrum

责任编辑 廖 坤 崔玉洁