

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.01.002

一个考虑信息负反馈和饱和治疗的传染病模型^①

刘 亭, 张国洪

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

摘要: 研究了一个考虑信息负反馈和饱和治疗的传染病模型. 首先研究了疾病信息的传播对平衡态的影响, 发现疾病信息量的增加在一定条件下可能会减小后向分支发生的区域, 甚至导致后向分支消失. 对于平衡点的稳定性, 证明了无病平衡点在基本再生数 $R_0 < 1$ 时是局部稳定的; 当系统存在两个地方病平衡点时, 证明其中一个是鞍点, 同时给出另一个平衡点渐近稳定的条件. 最后, 通过数值模拟发现系统在一定条件下存在双稳定现象, 且疾病信息的传播可能通过 Hopf 分支导致系统发生周期振荡.

关键词: 信息反馈; 后向分支; 双稳定; 周期振荡

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2019)01-0007-07

近年来, 越来越多的数学动力学模型被用来研究传染病的传播和控制问题^[1-4]. 特别地, 文献[4]研究了如下包括饱和治疗的传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - dS - \beta SI + \nu I + \frac{\gamma I}{1 + \alpha I} \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - (d + \nu)I - \frac{\gamma I}{1 + \alpha I} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $S(t), I(t)$ 分别代表易感种群和感染种群的密度; Λ 代表易感种群的出生数量; d 是自然死亡率; β 为易感种群与感染种群的接触率; ν 是自然康复率; $h(I) \triangleq \frac{\gamma I}{1 + \alpha I}$ 代表考虑医院饱和治疗条件下的康复率.

研究发现饱和治疗项的引进将导致后向分支的产生.

随着信息时代的来临, 人们可以通过媒体、网络等途径快速了解到各种传染病信息. 近来越来越多的研究者开始考虑信息对于疾病传播和控制的影响^[5-8]. 其中一种建模方法是假设疾病的相关信息将会减少易感者与感染个体的接触, 被称为信息的负反馈效应.

本文在模型(1)的基础上考虑疾病信息传播因素对模型性态的影响, 建立如下 SISM 传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - dS - \beta(M)SI + \nu I + \frac{\gamma I}{1 + \alpha I} \\ \frac{dI}{dt} = \beta(M)SI - (d + \nu)I - \frac{\gamma I}{1 + \alpha I} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\beta(M)$ 代表易感种群与感染种群的接触率, 与信息函数 $M(t)$ 负相关. 假设 $\beta(M) = \frac{1}{1 + KM}$, K 为非负

① 收稿日期: 2018-04-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(11701472, 11671327); 教育部基本科研业务费项目(XDJK2016C121).

作者简介: 刘 亭(1993-), 女, 硕士研究生, 主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者: 张国洪, 副教授.

数. 依据文献[6], 假设信息的生成与疾病感染数量和历史有关, 即有

$$M(t) = \int_0^{+\infty} g(I(t-s))\Gamma_n(s)ds \quad (3)$$

其中: $g(I)$ 为信息生成函数, 本文假设 $g(I) = \omega_0 + a_0 I$, ω_0 代表日常传播所生成的疾病信息, 当疾病爆发时, 政府相关部门或个体往往会依据染病者的数量加大宣传的力度, 从而可以假设信息的生成与 I 成比例,

a_0 是比例系数; 分布时滞核函数 $\Gamma_n(t) = \frac{\theta^{n+1} t^n e^{-\theta t}}{\Gamma(n+1)}$ 为伽马分布, 满足 $\int_0^{+\infty} \Gamma_n(s)ds = 1$. 当 $n=0$ 时即为弱核

$\Gamma_0(t) = \theta e^{-\theta t}$, 此时平均时滞为: $\int_0^{+\infty} s\Gamma_0(s)ds = \frac{1}{\theta}$.

对方程(3)两边求导, 再与(2)式联立, 可得如下模型:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - dS - \frac{SI}{1+KM} + \nu I + \frac{\gamma I}{1+aI} \\ \frac{dI}{dt} = \frac{SI}{1+KM} - (d+\nu)I - \frac{\gamma I}{1+aI} \\ \frac{dM}{dt} = \omega + aI - \theta M \end{cases} \quad (4)$$

其中: $\omega = \omega_0\theta$, $a = a_0\theta$. 本文将研究模型(4)信息负反馈对模型后向分支存在性以及无病平衡点与地方病平衡点的稳定性等问题的影响.

1 非负性与耗散性

令 $(S(t), I(t), M(t))$ 是系统(4)在给定初始条件 $S(0) > 0, I(0) > 0, M(0) > 0$ 下的任意解. 首先证明解 $(S(t), I(t), M(t))$ 的非负性.

易知 $I = 0$ 满足系统(4)的第二个方程, 由自治系统过初始点解的唯一性及 $I(0) > 0$ 知对任意 $t \geq 0$, 有 $I(t) > 0$.

若存在 $t_1 > 0$ 使得 $S(t_1) = 0$ 首次成立, 则有 $\frac{dS(t_1)}{dt} < 0$. 但是当 $t = t_1$ 时, 由(4)式的第一个方程可知 $\frac{dS(t_1)}{dt} \geq \Lambda > 0$, 显然与假设矛盾. 因此对于任意的 $t \geq 0$, 有 $S(t) > 0$.

由系统(4)的第3个方程可得

$$\frac{dM}{dt} = \omega + aI - \theta M \geq -\theta M$$

所以

$$M(t) \geq M(0)e^{\int_0^t -\theta ds}$$

因为 $M(0) > 0$, 这表明对任意的 $t \geq 0$, 有 $M(t) > 0$.

下证其耗散性. 依据系统(4)的前两个方程可得:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \leq \Lambda - d(S+I)$$

由比较定理, 得到 $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S+I) \leq \frac{\Lambda}{d}$. 当 t 充分大, 由系统(4)的第3个方程可得

$$\frac{dM}{dt} \leq \frac{d\omega + a\Lambda}{d} - \theta M$$

从而得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} M \leq \frac{d\omega + a\Lambda}{\theta d}$$

因此, 系统(4)有如下有界区域作为正不变集

$$\Omega := \left\{ (S, I, M) \in \mathbb{R}_+^3 : S, I, M \geq 0, S + I \leq \frac{\Lambda}{d}, M \leq \frac{d\omega + a\Lambda}{\theta d} \right\}$$

下面仅仅需要考虑 $(S, I, M) \in \Omega$.

2 平衡点的存在性

系统(4)总是存在一个无病平衡点(DFE): $\mathbf{E}_0 = \left(\frac{\Lambda}{d}, 0, \frac{\omega}{\theta} \right)$. 下面考虑地方病平衡点的存在性. 首先可以得到系统(4)基本再生数为

$$R_0 = \frac{\Lambda\theta}{d(d+\nu+\gamma)(\theta+K\omega)}$$

令(4)式右边为 0, 可以得到 $S^* = \frac{\Lambda}{d} - I^*$, $M^* = \frac{\omega + aI^*}{\theta}$, 这里 I^* 由下面的方程决定

$$P(I) \triangleq AI^2 + BI + C = 0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= dKa\alpha m + \theta d\alpha \\ B &= \theta d\alpha m + dK\omega\alpha m + dKam + d\gamma Ka + \theta d - \theta\alpha\Lambda \\ C &= \theta dm + dK\omega m + \theta\gamma d + d\gamma K\omega - \theta\Lambda \\ m &= d + \nu \end{aligned} \quad (6)$$

如果 $\alpha = 0$, 则有 $A = 0$, $B > 0$, 从而下面的结论显然成立.

定理 1 假设 $\alpha = 0$ 成立.

- (i) 如果 $R_0 > 1$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点.
- (ii) 如果 $R_0 \leq 1$, 系统(4)不存在地方病平衡点.

下面总是在假设 $\alpha > 0$ 的情况下考虑(5)式的根的存在性. 在一定条件下等式(5)可能存在如下两个根:

$$I_1^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad I_2^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

相应的地方病平衡点为 $\mathbf{E}_1 = (S_1^*, I_1^*, M_1^*)$ 和 $\mathbf{E}_2 = (S_2^*, I_2^*, M_2^*)$. 定义

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\theta\Lambda\alpha - \theta d\alpha m - dKam - d\gamma Ka - \theta d}{dK\alpha m} \\ \bar{a} &= \frac{\theta\Lambda\alpha - \theta d\alpha m - dK\omega\alpha m - \theta d}{dK m + dK\gamma} \\ \bar{R} &= 1 - \frac{(\theta d\alpha m + dK\omega\alpha m + dKam + d\gamma Ka + \theta d - \theta\alpha\Lambda)^2}{4d(m+\gamma)(\theta+K\omega)(dKa\alpha m + \theta d\alpha)} \end{aligned} \quad (7)$$

则可得如下定理.

定理 2 假设 $\alpha > 0$ 成立. $\bar{\omega}, \bar{R}$ 定义见(7)式.

- (i) 如果 $R_0 > 1$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 \mathbf{E}_2 .
- (ii) 如果 $R_0 \leq 1$ 并且 $\omega \geq \bar{\omega}$, 系统(4)不存在地方病平衡点.
- (iii) 如果 $R_0 = 1$ 并且 $\omega < \bar{\omega}$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 \mathbf{E}_2 .
- (iv) 如果 $R_0 < 1$, 并且 $\omega < \bar{\omega}$, 则有

- ① 当 $R_0 > \bar{R}$, 系统(4)存在两个地方病平衡点 \mathbf{E}_1 与 \mathbf{E}_2 ;
- ② 当 $R_0 = \bar{R}$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$;
- ③ 当 $R_0 < \bar{R}$, 系统(4)不存在地方病平衡点.

证 由式(6)可得到如下等价关系:

$$C < 0 \Leftrightarrow R_0 > 1, C = 0 \Leftrightarrow R_0 = 1, C > 0 \Leftrightarrow R_0 < 1$$

和

$$B < 0 \Leftrightarrow \omega < \bar{\omega}, B = 0 \Leftrightarrow \omega = \bar{\omega}, B > 0 \Leftrightarrow \omega > \bar{\omega}$$

如果 $R_0 > 1$, 有 $C < 0$, 再由 $A > 0$ 得方程(5)存在唯一正根, 知系统(4)存在唯一地方病平衡点, (i) 得证.

如果 $R_0 \leq 1$ 并且 $\omega \geq \bar{\omega}$, 则有 $B \geq 0, C \geq 0$, 再由 $A > 0$ 得方程(5)不存在正根, 知系统(4)不存在地方病平衡点, (ii) 得证.

如果 $R_0 = 1$ 并且 $\omega < \bar{\omega}$, 则方程(5)存在唯一正根 $I = \frac{-B}{A}$, 知系统(4)存在唯一的地方病平衡点, (iii) 得证.

如果 $R_0 < 1, \omega < \bar{\omega}$, 容易验证有下面的等价关系成立:

$$B^2 - 4AC < 0 \Leftrightarrow R_0 < \bar{R} \quad B^2 - 4AC = 0 \Leftrightarrow R_0 = \bar{R} \quad B^2 - 4AC > 0 \Leftrightarrow R_0 > \bar{R}$$

又因为 $A > 0$ 且当 $\omega < \bar{\omega}$ 时, 有 $B < 0$. 从而知当 $R_0 < \bar{R}, R_0 = \bar{R}$ 和 $R_0 > \bar{R}$ 时, 方程(5)分别存在 0, 1 和 2 个正根, 即相应的系统(4)分别存在 0, 1 和 2 个正平衡点, (iv) 得证.

定理 3 假设 $\alpha > 0$ 成立. \bar{a}, \bar{R} 定义见(7)式.

(i) 如果 $R_0 > 1$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 E_2 .

(ii) 如果 $R_0 \leq 1$ 并且 $a \geq \bar{a}$, 系统(4)不存在地方病平衡点.

(iii) 如果 $R_0 = 1$ 并且 $a < \bar{a}$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 E_2 .

(iv) 如果 $R_0 < 1$, 并且 $a < \bar{a}$, 则有

① 当 $R_0 > \bar{R}$, 系统(4)存在两个地方病平衡点 E_1 与 E_2 ;

② 当 $R_0 = \bar{R}$, 系统(4)存在唯一地方病平衡点 $E_1 = E_2$;

③ 当 $R_0 < \bar{R}$, 系统(4)不存在地方病平衡点.

注 1 定理 3 的证明与定理 2 类似, 这里省略. 从定理 2 和定理 3 可以看到, 当疾病的信息不够充分, 即有 $\omega < \bar{\omega}$ 或 $a < \bar{a}$ 时, 系统可能存在后向分支. 由(7)式可得:

$$\bar{R}'(\omega) = \frac{K^2 m^2 (\bar{\omega} - \omega) (2\theta + K\omega + K\bar{\omega})}{4(m + \gamma)(\theta + K\omega)^2 (Kam + \theta)}$$

以及

$$\bar{R}'(a) = \frac{K^2 (m + \gamma) (\bar{a} - a) (2\theta + aKm + \bar{a}Km)}{4\alpha(\theta + K\omega)(\theta + Kam)^2}$$

因此当 $\omega < \bar{\omega}$ 或 $a < \bar{a}$ 时, $\bar{R}'(a) > 0, \bar{R}'(\omega) > 0$. 从而知后向分支点 \bar{R} 的取值随着 ω 及 a 的增加而增加, 当 $\omega > \bar{\omega}$ 时, 后向分支消失. 从实际意义讲, 如果有更多的疾病信息存在, 则相应发生后向分支的区域将会减小, 甚至消失.

3 平衡点的稳定性

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 局部渐进稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是个鞍点.

证 系统(4)在平衡点 E_0 处的雅可比矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -d & \nu + \gamma - \frac{\Delta\theta}{d(\theta + K\omega)} & 0 \\ 0 & (R_0 - 1)(d + \nu + \gamma) & 0 \\ 0 & a & -\theta \end{pmatrix}$$

易知当 $R_0 < 1$ 时, 雅可比矩阵的特征值皆为负, 知 E_0 局部渐进稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 存在正特征值, 知 E_0 是个鞍点.

下面将分析地方病平衡点的稳定性. 系统(4)在正平衡点处的雅可比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} -d - \frac{I^*}{1 + KM^*} & \frac{-S^*}{1 + KM^* + \nu + \frac{\gamma}{(1 + \alpha I^*)^2}} & \frac{KS^* I^*}{(1 + KM^*)^2} \\ \frac{I^*}{1 + KM^*} & \frac{-S^*}{1 + KM^* - m - \frac{\gamma}{(1 + \alpha I^*)^2}} & -\frac{KS^* I^*}{(1 + KM^*)^2} \\ 0 & a & -\theta \end{pmatrix}$$

可得特征多项式:

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$$

其中

$$b_1 = \theta + 2d + \nu + \frac{I^* - S^*}{1 + KM^*} + \frac{\gamma}{(1 + \alpha I^*)^2}$$

$$b_2 = \frac{(I^* - S^*)(\theta + d)}{1 + KM^*} + \frac{\gamma(\theta + d)}{(1 + \alpha I^*)^2} + \frac{aKI^* S^*}{(1 + KM^*)^2} + 2d\theta + \theta\nu + d^2 + d\nu$$

$$b_3 = \frac{\theta d(I^* - S^*)}{1 + KM^*} + \frac{\gamma\theta d}{(1 + \alpha I^*)^2} + \frac{aKdI^* S^*}{(1 + KM^*)^2} + \theta d^2 + \theta\nu$$

假设 $\bar{R} < R_0 < 1$, $\bar{\omega} < \omega$ 或 $a < \bar{a}$, 则系统(4) 存在正平衡点 E_1 和 E_2 .

$$b_3|_{E_1} = \frac{I_1^*}{(1 + KM_1^*)(1 + \alpha I_1^*)^2} [(aKd^2 \alpha^2 + aKd\nu\alpha^2 + \theta d\alpha^2) I_1^{*2} + (2aK\alpha d^2 + 2aKd\nu\alpha + 2\theta d\alpha) I_1^* + aKd^2 - d\gamma\alpha\theta - d\gamma\alpha\omega K + aKd\nu + aKd\gamma + \theta d] \tag{8}$$

将 $\Lambda = dS + \frac{SI}{1 + KM} - \nu I - \frac{\gamma I}{1 + \alpha I}$ 代入(5), (6) 式, 经计算可得

$$P'(I) = \frac{1}{1 + \alpha I} [(aKd^2 \alpha^2 + aKd\nu\alpha^2 + \theta d\alpha^2) I^2 + (2aK\alpha d^2 + 2aKd\nu\alpha + 2\theta d\alpha) I + aKd^2 - d\gamma\alpha\theta - d\gamma\alpha\omega K + aKd\nu + aKd\gamma + \theta d] \tag{9}$$

比较(8) 和(9) 式, 可见 $b_3|_{E_1}$ 与 $P'(I_1^*)$ 符号相同. 由 $I_1^* < I_2^*$ 知 $P'(I_1^*) < 0$, 从而有 $b_3|_{E_1} < 0$. 依据 Routh-Hurwitz 原理知 E_1 是一个鞍点, 从而 E_1 是不稳定的.

对于平衡点 E_2 的稳定性, 我们知道 $P'(I_2^*) > 0$, 因此 $b_3|_{E_2} > 0$. 所以依据 Routh-Hurwitz 原理可得下面的定理 5.

定理 5 假设 $\bar{R} < R_0 < 1$, $\bar{\omega} < \omega$, 正平衡点 E_1 是个鞍点; 正平衡点 E_2 局部渐进稳定当且仅当 $b_1 > 0$ 和 $b_1 b_2 - b_3 > 0$ 成立.

4 数值模拟

基于上述理论分析, 取定参数 $\Lambda = 14$, $d = 0.01$, $K = 8$, $\nu = 0.2$, $\alpha = 1$, $\gamma = 10$, $\omega = 15$, $\theta = 0.5$, 此时 $R_0 = 0.569 < 1$. 以信息生成率 a 为分支参数, 通过 Matcont 软件可得系统(4) 的平衡态分支图 1. 图 1 表明, 当信息生成率 a 较小时, 系统存在两个地方病平衡态 E_1 和 E_2 , 且随着 a 增加, E_2 中的 I 值不断降低, 说明信息的加快传播使平衡态染病者数量下降, 从而有助于疾病的控制; 当 $a = 5.712\ 627$ 时, 系统在 E_2 处出现 Hopf 分支现象; 当参数 a 充分大时, 系统不存在地方病平衡

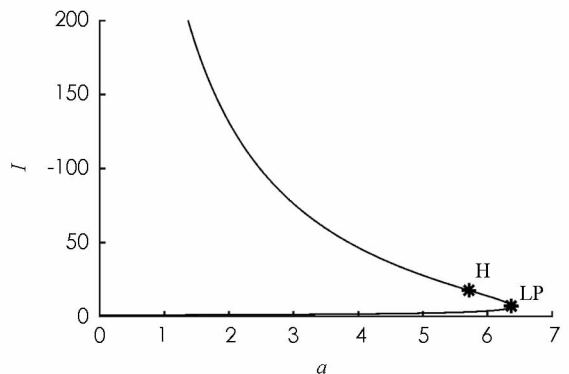


图 1 系统(4) 的平衡态分支图

态. 图 2(a) 和(b) 为参数 $a = 2$ 时在不同初始条件下染病者种群的时间序列图. 可以看到当初始条件为 $S = 1\ 382$, $I = 10$, $M = 230$ 时, 即初始染病者数量较少时, 染病者 I 数量趋于零; 当初始条件取 $S = 1\ 382$, $I = 15$, $M = 230$ 时, 染病者 I 趋于正平衡点, 可见系统在此条件下存在两个平衡态的双稳态现象. 图 2(c) 中取参数 $a = 5.7$, 系统存在周期解, 可见信息的加速传播可能导致染病者 I 数量呈周期性振荡. 图 2(d) 中取参数 $a = 6$, 此时染病者 I 数量趋于零, 说明信息传播速度的进一步增加有助于疾病的控制和消灭. 图 2(c) 和(d) 所取除 I 值以外的初始条件与图 2(b) 相同.

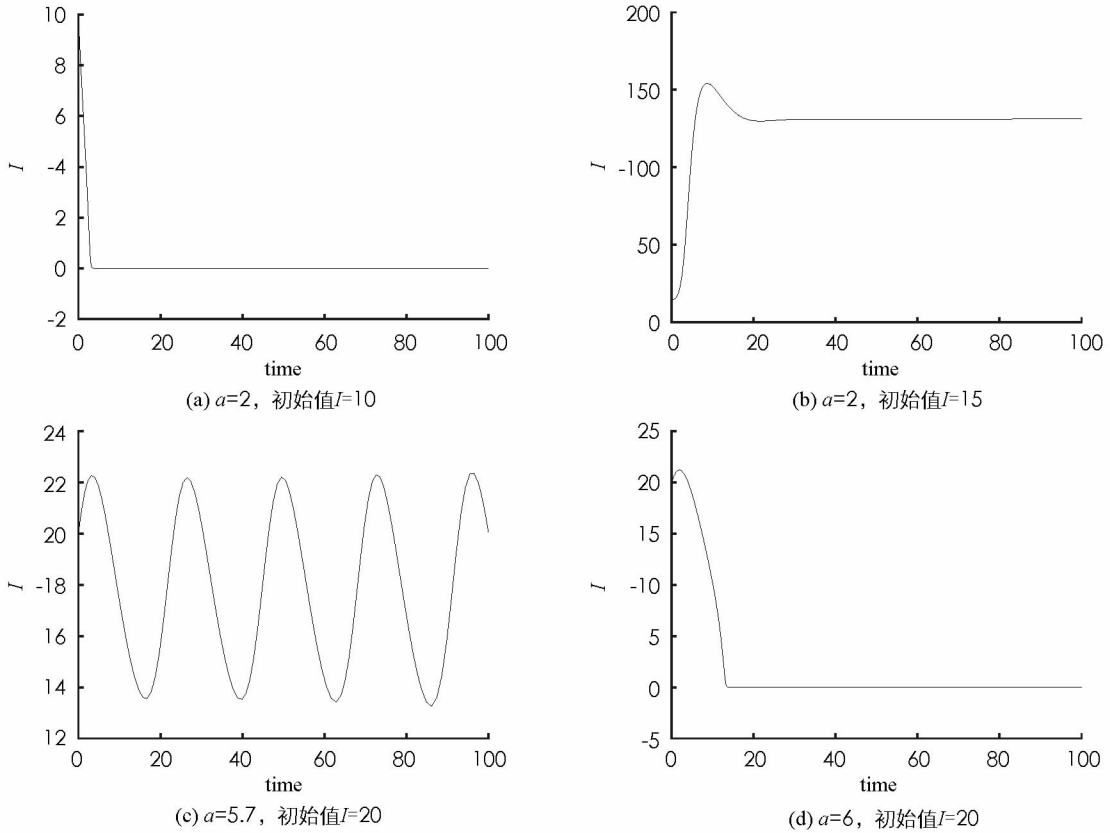


图 2 系统(4)时间序列图

参考文献:

- [1] DUSHOFF J, HUANG W Z, CASTILLO-CHAVEZ C. Backward Bifurcation and Catastrophe in Simple Models of Fatal Disease [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1998, 36(3): 227—248.
- [2] WANG W D. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment [J]. *Mathematical Biosciences*, 2006, 201(1): 58—71.
- [3] ZHANG X, LIU X N. Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 348(1): 433—443.
- [4] CUI J G, MU X X, WAN H. Saturation Recovery Leads to Multiple Endemic Equilibria and Back-ward Bifurcation [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2008, 254(2): 275—283.
- [5] DONOFRIO A, MANFREDI P, SALINELLI E. Vaccinating Behaviour, Information, and the Dynamics of SIR Vaccine Preventable Diseases [J]. *Theoretical Population Biology*, 2007, 71(3): 301—317.
- [6] BUONOMO B, D'ONFRIO A, LACITIGNOLA D. Globally Stable Endemicity for Infectious Diseases with Information-Related Changes in Contact Pattern [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25(7): 1056—1060.
- [7] LIU R S, WU J H, ZHU H P. Media/Psychological Impact on Multiple Outbreaks of Emerging Infectious Diseases [J].

Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2007, 8(3): 153–164.

- [8] KUMAR A, SRIVASTAVA P K, TAKEUCHI Y. Modeling the Role of Information and Limited Optimal Treatment on Disease Prevalence [J]. Journal of Theoretical Biology, 2017, 414: 103–119.

An Epidemic Model with Saturated Treatment Function and Negative Information Feedback

LIU Ting, ZHANG Guo-hong

School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, we have consider the SISM epidemic model with the negative feedback of information and saturated treatment function. Firstly, the effects of disease-related information on equilibrium state are studied. We find that the backward bifurcation may disappear with the increase of disease information. Then we have analyzed the locally stability of the equilibria. It is found that the disease-free equilibrium is stable when the basic reproduction number is less than 1. When there are two positive equilibria, it is found that one of equilibria is saddle point and the other is locally asymptotically stable under some conditions. Finally, by means of numerical simulation, we find that there may be a bistable phenomenon and the increase of information of disease may cause the periodic oscillation of the system by Hopf bifurcation.

Key words: information feedback; backward bifurcation; bistable; periodic oscillation

责任编辑 张 枸