第 44 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 1 月
Vol. 44　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jan.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.01.003

一个典型弹性梁方程涉及第一特征值的正解①

纪 宏 伟

南通师范高等专科学校 数理系,江苏 南通 226010

摘要:运用锥理论和不动点指数方法,在与相应的线性算子第一特征值有关的条件下,获得了一个典型弹性梁方程正解的存在性,改进了相关文献的结论.

关　键　词:弹性梁方程;正解;不动点指数;锥

中图分类号:**O241**　　**文献标志码**:**A**　　**文章编号**:1000-5471(2019)01-0014-06

1　引言和预备知识

考察下列四阶非线性微分方程两点边值问题(BVP)正解的存在性:

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t,\ u(t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中非线性项 f:$[0,\ 1] \times [0,\ +\infty) \to [0,\ +\infty)$ 连续,如果 $u \in C[0,\ 1]$,$u(t) > 0$,$t \in [0,\ 1]$,并且满足(1)式,则称 u 为(1)式的一个正解.

梁是工程建筑的基本构件之一,弹性力学和工程物理中常用四阶常微分方程边值问题来刻画弹性梁的平衡状态.根据梁的两端支撑条件不同,会得到不同的四阶边值问题.由于这类问题的普遍性和重要性,四阶两点边值问题和多点边值问题受到广泛关注,相关研究也获得了许多深刻的结果[1-8].对于两端简单支撑的弯曲弹性梁的平衡状态可用四阶两点边值问题(1)来描述,近年来有较多文献研究了其正解的存在性[9-12].但是所得正解充分性条件与四阶两点边值问题(1)相应线性问题的第一特征值之间并没有建立起联系.线性全连续算子的特征值是非常重要的具有实际意义的指标,在边值问题正解及多个正解存在性的研究中是一个很本质的量.受文献[13]启发,本文用相应线性算子第一特征值取代超线性及次线性条件中的 0 和∞,减弱了超线性及次线性条件,该条件中所涉及的值是最优的,因而推广和改进了文献[9-12]的相关结论.

边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = 0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G(t,\ s) = \frac{1}{6}\begin{cases} t(1-s)(2s - s^2 - t^2) \qquad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ s(1-t)(2t - t^2 - s^2) \qquad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \tag{2}$$

以下总假设 $E = C[0,\ 1]$ 中,范数由 $\|u\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)|$ 定义,则$(E,\ \|\cdot\|)$构成一个 Banach 空间.令 $P = \{u \in C[0,\ 1] \mid u(t) \geqslant 0,\ t \in [0,\ 1]\}$,于是 P 是 E 中的一个正锥.有关锥理论和不动点指数

① 收稿日期:2018-05-12
基金项目:江苏省高校青蓝工程基金项目(2018).
作者简介:纪宏伟(1977-),男,硕士,副教授,主要从事非线性泛函分析及高等数学研究.

的概念与性质见专著[14].

定义非线性算子 A 和线性算子 B 如下：

$$(Au)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \qquad t\in[0,1] \tag{3}$$

$$(Bu)(t)=\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s \qquad t\in[0,1] \tag{4}$$

参考文献[1]的引理 2，容易证明 A，B：$P\to P$ 是全连续算子，并且 $u\in C[0,1]$ 为边值问题(1)的解当且仅当 u 是 A 的不动点.

引理 1　Green 函数具有以下性质：

(1) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续非负对称；

(2) $\frac{1}{6}t(1-t)s(1-s)\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{1}{3}t(1-t)s(1-s)$，$\forall\, t,s\in[0,1]$

证　结论(1)明显成立. 对任意满足 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 的 t，s，有

$$G(t,s)\leqslant\frac{1}{6}t(1-s)(2s-2ts)=\frac{1}{3}t(1-t)s(1-s)$$

另一方面，有

$$G(t,s)=\frac{1}{6}t(1-s)(2s-s^2-t^2)\geqslant\frac{1}{6}t(1-s)(2s-s-st)=\frac{1}{6}t(1-t)s(1-s)$$

即(2)对任意满足 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1$ 的 t，s 成立. 类似可证对任意满足 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 的 t，s 也成立.

引理 2[14]　设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的锥，Ω 是 P 中的有界开集. 假设 A：$P\cap\overline{\Omega}\to P$ 是全连续算子，如果存在 $u_0\in P\backslash\{\theta\}$，使得 $u-Au\neq\mu u_0$，$\forall\, u\in P\cap\partial\Omega$，$\mu\geqslant 0$，则不动点指数 $i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

引理 3[14]　设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的锥，Ω 是 P 中的有界开集，假设 A：$P\cap\overline{\Omega}\to P$ 是全连续算子，如果 $Au\neq\mu u$，$\forall\, u\in P\cap\partial\Omega$，$\mu\geqslant 1$，则不动点指数 $i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

引理 4[15]　设 E 是 Banach 空间，算子 B：$E\to E$ 全连续且 $B(P)\subset P$，若存在 $\psi\in E\backslash(-P)$ 及一个常数 $c>0$，使得 $cB\psi\geqslant\psi$，则 B 的谱半径 $r(B)\neq 0$，并且 B 有对应于第一特征值 $\lambda_1=(r(B))^{-1}$ 的正特征函数 φ，满足 $\varphi=\lambda_1 B\varphi$.

引理 5　设线性算子 B 由(4)定义，则 B 的谱半径 $r(B)\neq 0$，并且 B 有对应于第一特征值 $\lambda_1=(r(B))^{-1}$ 的正特征函数.

证　$\forall\, t\in[0,1]$，取 $\psi(t)=t(1-t)$，$c=\left(\int_0^1\frac{1}{6}s^2(1-s)^2\mathrm{d}s\right)^{-1}=44>0$，由引理 1 有 $B\psi(t)=\int_0^1 G(t,s)s(1-s)\mathrm{d}s\geqslant\int_0^1\frac{1}{6}t(1-t)s^2(1-s)^2\mathrm{d}s=t(1-t)\int_0^1\frac{1}{6}s^2(1-s)^2\mathrm{d}s=c^{-1}\psi(t)$

即

$$cB\psi\geqslant\psi$$

因此，由引理 4 知 $r(B)\neq 0$，并且 B 有对应于第一特征值 $\lambda_1=(r(B))^{-1}$ 的正特征函数.

引理 6　若 $\varphi^*\in P$ 是 B 相应于第一特征值 λ_1 的正特征函数，则

(1) 存在常数 $\delta>0$，使得 $\varphi^*(s)\geqslant\delta G(t,s)$

(2) 令 $P_1=\{\varphi\in P\mid\int_0^1\varphi^*(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\geqslant\lambda_1^{-1}\delta\|\varphi\|\}$，则 P_1 是 $C[0,1]$ 中的锥，$B(P)\subset P_1$.

证　(1) 因为 $\varphi^*\in P$ 是 B 相应于第一特征值 λ_1 的正特征函数，由引理 1 得

$$\varphi^*(s)=\lambda_1 B\varphi^*(s)=\lambda_1\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\lambda_1}{3}s(1-s)\int_0^1 t(1-t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t$$

所以 $\int_0^1 t(1-t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t>0$，于是令 $\delta=2\lambda_1\int_0^1 t(1-t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t$，有

$$\varphi^*(s)=\lambda_1\int_0^1 G(t,s)\varphi^*(t)\mathrm{d}t\geqslant$$

$$\frac{\lambda_1}{6}\int_0^1 t(1-t)s(1-s)\varphi^*(t)\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\lambda_1}{6}s(1-s)\int_0^1 t(1-t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t \geqslant$$
$$2\lambda_1 G(t,s)\int_0^1 t(1-t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t =$$
$$\delta G(t,s)$$

(2) 注意到 $\lambda_1\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(s)\mathrm{d}s=\lambda_1\int_0^1 G(t,s)\varphi^*(s)ds=\lambda_1 B\varphi^*(t)=\varphi^*(t)$,所以对于 $\forall\varphi\in P$,有

$$\begin{aligned}\int_0^1\varphi^*(t)(B\varphi)(t)\mathrm{d}t=&\int_0^1\varphi^*(t)\Big[\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}t=\\&\int_0^1\varphi(s)\Big[\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(t)\mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}s=\\&\lambda_1^{-1}\int_0^1\varphi(s)\varphi^*(s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda_1^{-1}\delta\int_0^1\varphi(s)G(t,s)\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda_1^{-1}\delta(B\varphi)(t)\end{aligned}$$

所以 $\int_0^1\varphi^*(t)(B\varphi)(t)\mathrm{d}t\geqslant\lambda_1^{-1}\delta\|B\varphi\|$,即 $B(P)\subset P_1$.

2 超线性情形正解的存在性

定理 1 设 $f(t,u)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上非负连续,并且满足

$$\limsup_{u\to0^+}\frac{f(t,u)}{u}<\lambda_1 \tag{5}$$

$$\liminf_{u\to+\infty}\frac{f(t,u)}{u}>\lambda_1 \tag{6}$$

其中 λ_1 是由(4)定义的线性算子 B 的第一特征值,则边值问题(1)至少有一个正解.

证 由(5)式,存在 $0<r<R$,使得

$$f(t,u)\leqslant\lambda_1 u,\ \forall\,0\leqslant t\leqslant1,\ 0\leqslant u\leqslant r$$

如果存在 $u_2\in P\cap T_r$,$\mu_1\geqslant1$,使得 $Au_2=\mu_1u_2$,不妨设 $\mu_1>1$,否则定理得证. 故

$$\mu_1u_2(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u_2(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda_1\int_0^1 G(t,s)u_2(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

设 $\varphi^*\in P$ 是 B 相应于第一特征值 λ_1 的正特征函数. 在(7)式两端乘以 φ^* 后再积分,结合 $\lambda_1\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(s)\mathrm{d}s=\lambda\varphi^*(t)$,有

$$\begin{aligned}\mu_1\int_0^1\varphi^*(t)u_2(t)\mathrm{d}t\leqslant&\lambda_1\int_0^1\varphi^*(t)\mathrm{d}t\int_0^1 G(t,s)u_2(s)\mathrm{d}s=\\&\lambda_1\int_0^1 u_2(t)\mathrm{d}t\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(s)\mathrm{d}s=\\&\int_0^1\varphi^*(t)u_2(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{8}$$

因为 $\varphi^*(t)>0$,$u_2(t)>0$,所以(8)式意味着 $\mu_1\leqslant1$,矛盾. 根据引理 3 知

$$i(A,T_r\cap P,P)=1 \tag{9}$$

由(6)式,当 u 充分大时,存在 $\varepsilon>0$,$b\geqslant0$,使得

$$f(t,u)\geqslant(\lambda_1+\varepsilon)u-b\qquad 0\leqslant u\leqslant+\infty \tag{10}$$

取 $R=(\varepsilon\delta)^{-1}\lambda_1 b\int_0^1\varphi^*(t)\mathrm{d}t$,其中 δ 和 φ^* 由引理 6 定义.

下面证明

$$u-Au\neq\mu\varphi^*,\ \forall\,u\in\partial T_R\cap P,\ \mu\geqslant0 \tag{11}$$

其中 $\varphi^*\in P$ 相应于第一特征值的正特征函数. 如若不然,假设存在 $\mu^*\geqslant0$ 及 $u^*\in\partial T_R\cap P$,使得

$$u^* - Au^* = \mu^* \varphi^* \tag{12}$$

由(10)式，

$$Au(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,u(s))\mathrm{d}s \geqslant \int_0^1 G(t,s)((\lambda_1+\varepsilon)u - b)\mathrm{d}s =$$

$$(\lambda_1+\varepsilon)\int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s - b\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s$$

从而

$$\int_0^1 \varphi^*(t)(Au^*)(t)\mathrm{d}t \geqslant (\lambda_1+\varepsilon)\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t\int_0^1 G(t,s)u^*(s)\mathrm{d}s - b\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s =$$

$$(\lambda_1+\varepsilon)\int_0^1 u^*(t)\mathrm{d}t\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(s)\mathrm{d}s - b\int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^1 G(s,t)\varphi^*(s)\mathrm{d}s =$$

$$(\lambda_1+\varepsilon)\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t - b\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t + \varepsilon\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t - b\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t$$

由于 $A(P)\subset P_1$，$B(P)\subset P_1$，$\varphi^*\in P$，$u^*\in \partial T_R\cap P$，所以 $\varphi^* = \lambda_1^{-1}B\varphi^*\in P_1$，$Au^*\in P_1$，由(12)知 $u^*\in P_1$，于是由引理 6，有

$$\int_0^1 \varphi^*(t)(Au^*)(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t \geqslant \varepsilon\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t - b\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t \geqslant$$

$$\varepsilon\lambda_1^{-1}(\lambda_1^{-1}\delta\|u^*\|) - b\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t =$$

$$\varepsilon\delta\lambda_1^{-2}R - b\lambda_1^{-1}\int_0^1 \varphi^*(t)\mathrm{d}t > 0$$

但是另一方面，由(12)式可得 $\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^*(t)(Au^*)(t)\mathrm{d}t = \mu^*\int_0^1 \varphi^*(t)u^*(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$，矛盾．所以根据引理 2

$$i(A, T_R\cap P, P) = 0 \tag{13}$$

由(8)式和(13)式可得

$$i(A, (T_R\setminus \overline{T_r})\cap P, P) = i(A, T_R\cap P, P) - i(A, T_r\cap P, P) = -1$$

这表明 A 在 $(T_R\cap P)\setminus(\overline{T}_r\cap P)$ 上至少有一个不动点，因此边值问题(1)至少有一个正解．证毕．

推论 1 设 $f(t,u)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上非负连续，记

$$f_\infty = \lim_{u\to+\infty}\inf_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u},\quad f^0 = \lim_{u\to 0^+}\sup_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u} \tag{14}$$

如果 $0\leqslant f^0 < f_\infty \leqslant +\infty$，则当 $\lambda\in\left(\frac{\lambda_1}{f_\infty}, \frac{\lambda_1}{f^0}\right)$ 时，其中 λ_1 是(4)定义的线性算子 B 的第一特征值，四阶非线性两点边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda f(t,u(t)) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

至少存在一个正解．

证 由(14)式可知 $\limsup\limits_{u\to 0^+}\frac{\lambda f(t,u)}{u} < \lambda_1$，$\liminf\limits_{u\to+\infty}\frac{\lambda f(t,u)}{u} > \lambda_1$，因此根据定理 1，推论 1 结论成立．

注 1 在超线性情形下，定理 1 和推论 1 本质地推广和改进了文献[9－12]中的相应结果．

3 次线性情形正解的存在性

定理 2 设 $f(t,u)$ 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上非负连续，并且满足

$$\liminf_{u\to 0^+}\frac{f(t,u)}{u} > \lambda_1 \tag{16}$$

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{f(t,u)}{u} < \lambda_1 \tag{17}$$

其中 λ_1 是由(4)式定义的线性算子 B 的第一特征值，则边值问题(1)至少有一个正解.

证 由(16)式知，存在 $r_1 > 0$，使得

$$f(u) \geqslant \lambda_1 u,\ \forall\, 0 \leqslant u \leqslant r_1 \tag{18}$$

记 $T_r = \{u \in C[0,1] \mid \|u\| < r\}$，对于 $\forall\, u \in \partial T_{r_1} \cap P$，由(3)式和(18)式有

$$Au(t) \geqslant \lambda_1 \int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s = \lambda_1 Bu(t) t \in [0,1] \tag{19}$$

设 φ^* 是 B 相应于 λ_1 的正特征函数，于是 $\varphi^* = \lambda_1 B\varphi^*$. 不妨设 A 在 $\partial T_{r_1} \cap P$ 上没有不动点(否则定理得证). 现在证明

$$\varphi - A\varphi \neq \mu\varphi^*,\ \forall\, \varphi \in \partial T_{r_1} \cap P,\ \mu \geqslant 0 \tag{20}$$

如若不然，存在 $\varphi_0 \in \partial T_{r_1} \cap P$ 和 $\tau_0 \geqslant 0$，使得 $\varphi_0 - A\varphi_0 = \tau_0\varphi^*$. 于是 $\tau_0 > 0$，$\varphi_0 = A\varphi_0 + \tau_0\varphi^* \geqslant \tau_0\varphi^*$. 令 $\tau^* = \sup\{\tau \mid \varphi_0 \geqslant \tau\varphi^*\}$. 容易知道 $\tau^* \geqslant \tau_0 > 0$ 和 $\varphi_0 \geqslant \tau^*\varphi^*$. 由 $B(P) \subset P$，可见 $\lambda_1 B\varphi_0 \geqslant \tau^* \lambda_1 B\varphi^* = \tau^*\varphi^*$. 因此根据(19)式，有

$$\varphi_0 = A\varphi_0 + \tau_0\varphi^* \geqslant \lambda_1 B\varphi_0 + \tau_0\varphi^* \geqslant (\tau^* + \tau_0)\varphi^*$$

这与 μ^* 的定义矛盾. 因此(20)式成立，于是由引理2，可得

$$i(A, T_{r_1} \cap P, P) = 0 \tag{21}$$

由(17)式，存在 $0 < \sigma < 1$ 和 $r_2 > r_1$，使得

$$f(t,u) \leqslant \sigma\lambda_1 u,\ \forall\, t \in [0,1],\ u \geqslant r_2 \tag{22}$$

定义 $B_1 u = \sigma\lambda_1 Bu$，$u \in C[0,1]$，则 $B_1: C[0,1] \to C[0,1]$ 是有界线性算子且 $B_1(K) \subset K$.

记

$$M = (\max_{0 \leqslant t, s \leqslant 1} G(t,s)) \sup_{u \in T_{r_2}} \int_0^1 f(s, u(s))\mathrm{d}s$$

显然 $M < +\infty$. 设 $W = \{u \in P: u = \mu Au,\ 0 \leqslant \mu \leqslant 1\}$，则 W 有界. 事实上，对 $\forall\, u \in W$，$\tilde{u}(t) = \min\{u(t), r_2\}$，$E(t) = \{t \in [0,1] \mid u(t) > r_2\}$，则由(22)式有

$$\begin{aligned}
u(t) = \mu(Au)(t) \leqslant \mu \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s = \\
\int_{E(t)} G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s + \int_{[0,1]\setminus E(t)} G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
\sigma\lambda_1 \int_0^1 G(t,s)u(s)\mathrm{d}s + \int_0^1 G(t,s)f(s,\tilde{u}(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
(B_1 u)(t) + M,\ t \in [0,1]
\end{aligned}$$

因此 $((I - B_1)u)(t) \leqslant M$，$t \in [0,1]$. 由于 λ_1 是 B 的第一特征值，且 $0 < \delta < 1$，从而 B_1 的第一特征值且 $(r(B_1))^{-1} > 1$，故逆算子 $(I - B_1)^{-1}$ 存在，且有

$$(I - B_1)^{-1} = I + B_1 + B_1^2 + \cdots + B_1^n + \cdots$$

由 $B_1(K) \subset K$，得 $(I - B_1)^{-1}(K) \subset K$，从而 $u(t) \leqslant (I - B_1)^{-1}M$，$t \in [0,1]$，故 W 是有界的.

取 $r_3 > \max\{r_2, \sup W\}$，由不动点指数的同伦不变性得

$$i(A, T_{r_3} \cap P, P) = i(I, T_{r_3} \cap P, P) = 1 \tag{23}$$

由不动点指数的可加性，以及(21)式、(23)式，可得

$$i(A, (T_{r_3} \cap P)\setminus(\overline{T}_{r_1} \cap P), P) = i(A, T_{r_3} \cap P, P) - i(A, T_{r_1} \cap P, P) = 1$$

故 A 在 $(T_{r_3} \cap P)\setminus(\overline{T}_{r_1} \cap P)$ 上至少有一个不动点，因此边值问题(1)至少有一个正解. 证毕.

推论2 设 $f(t,u)$ 在 $[0,1] \times [0,+\infty)$ 上非负连续，记

$$f_0 = \lim_{u \to 0^+} \inf_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \qquad f^\infty = \lim_{u \to +\infty} \sup_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u} \tag{24}$$

如果 $0 \leqslant f^\infty < f_0 \leqslant +\infty$，则当 $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{f_0}, \frac{\lambda_1}{f^\infty}\right)$ 时，BVP(15)至少有一个正解，其中 λ_1 是(3)式定义的线性

算子 B 的第一特征值.

证　由(24)式可知 $\liminf\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\lambda f(t,u)}{u}>\lambda_1$，$\limsup\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\lambda f(t,u)}{u}<\lambda_1$，因此根据定理 2，推论 2 结论成立.

注 2　在次线性情形下，定理 1 和推论 1 本质地推广和改进了文献[9－12]中的相应结果.

参考文献：

[1] 吴红萍，马如云．一类四阶两点边值问题正解的存在性 [J]．应用泛函分析学报，2000，2(4)：342－348.

[2] MA R Y，ZHANG J H，FU S M. The Method of Lower and Upper Solutions for Fourth-Order Two-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1997，215(2)：415－422.

[3] YAO Q. Positive Solutions for Eigenvalue Problems of Fourth-Order Elastic Beam Equations [J]. Appl Math Lett，2004，17(2)：237－243.

[4] YANG Y，ZHANG J. Existence of Solutions for Some Fourth-Order Boundary Value Problems with Parameters [J]. Nonlinear Analysis. Theory，Methods & Applications，2008，69(4)：1364－1375.

[5] LU H X，SUN L，SUN J X. Existence of Positive Solutions to a Non-Positive Elastic Beam Equation with Both Ends Fixed [J]. Boundary Value Problems，2012，56(11)：1－10.

[6] 周韶林，吴红萍，韩晓玲．一类四阶三点边值问题正解的存在性 [J]．四川大学学报(自然科学版)，2014，51(1)：11－15.

[7] WEI Z L，ZHANG M C. Positive Solutions of Singular Sub-Linear Boundary Value Problems for Fourth-Order and Second-Order Differential Equation Systems [J]，Applied Mathematics and Computation，2008，197(1)：135－148.

[8] BONANNO G，BELLA B D，O'REGAN D. Non-Trivial Solutions for Nonlinear Fourth-Order Elastic Beam Equations [J]. Comput Math Appl，2011，62(4)：1862－1869.

[9] LI Y. Positive Solutions of Fourth-Order Boundary-Value Problem with Two Parameters [J]. J Math Anal Appl，2003，281(2)：477－484.

[10] CHAI G Q，HUANG C Y. Existence of Positive Solutions for the Fourth-Order Boundary Value Problem with the Coeffcient [J]. J Acta Mathematics Scientia，2007，27A(6)：1065－1073.

[11] CHEN T L. Existence of Positive Solutions for a Class of Fourth-Order Ordinary Differential Equations of Two-Point Boundary Value Problem [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2010，27(4)：679－683.

[12] 姚庆六．两端简单支撑的奇异梁方程的正解 [J]．数学进展，2009，38(5)：590－598.

[13] CUI Y J，SUN J X，ZOU Y M. Positive Solutions of Singular Boundary Value Problems of Fourth-Order Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Research&Exposition Mar，2009，29(2)：376－380.

[14] 孙经先．非线性泛函分析及其应用 [M]．北京：科学出版社，2008.

[15] 郭大钧，孙经先．非线性积分方程 [M]．济南：山东科学技术出版社，1987.

On Positive Solution of First Eigenvalue Involved in a Typical Elastic Beam Equation

JI Hong-wei

Department of Mathematics and Physics，Nantong Teachers College，Nantong Jiangsu 226010，China

Abstract：By cone theory and in the fixed point index method，the existence of positive solutions of a typical elastic beam equation has been obtained under the condition of the first eigenvalue of the corresponding linear operator，and the conclusions of relevant literatures been improved.

Key words：elastic beam equation；positive solution ；fixed point index；cone

责任编辑　夏　娟