DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.01.004

向量优化中广义 E-Benson 真有效解的代数性质[①]

王　婷[1]，　刘学文[2]

1. 重庆西藏中学，重庆 400036；2. 重庆师范大学 研究生院，重庆 401331

摘要： 利用代数内部和代数闭包等工具，在适当的广义凸性条件下研究了集值向量优化问题广义 E-Benson 真有效解的一些代数性质，建立了广义 E-Benson 真有效解的线性标量化结果、拉格朗日乘子定理和鞍点定理.

关　键　词： 向量优化；广义 E-Benson；代数内部；线性标量化；拉格朗日乘子

中图分类号：O221.6　　**文献标志码：A**　　**文章编号：** 1000-5471(2019)01-0020-05

向量优化理论与方法在经济管理、工程设计与交通运输等诸多领域中都有十分重要的应用. 近年来，关于向量优化问题研究已有一些重要成果[1-2]. 在向量优化领域中，关于解的定义及其性质的研究是十分重要的研究方向. 有效解和弱有效解是向量优化领域中的两类基础解概念. 然而由于有效解集或弱有效解集可能太大，一些学者提出了各种类型的真有效解概念对有效解或弱有效解进行限制. 特别地，文献[3]中利用投影锥提出了 Benson 真有效解的概念并研究了这类真有效解的一些性质. 关于 Benson 真有效解性质的进一步研究见文献[4-5]等. 特别地，文献[5]在拓扑线性空间中提出了集值映射的邻近次似凸性，并建立了邻近次似凸性下的择一性定理，进而利用相应的择一性定理研究了向量优化问题 Benson 真有效解的线性标量化性质.

由于向量优化问题的精确解即使在非常弱的条件下也可能不存在，因此，近年来一些学者开始从不同的角度提出向量优化问题的各种不同类型的近似解概念，并研究了相应近似解的一些性质[6-10].

值得注意的是，向量优化中各类经典的解定义一般依赖于像空间中序锥的拓扑内部的非空性. 基于此，当序锥的拓扑内部可能为空时，如何定义向量优化问题的解概念并研究各类解的性质等具有十分重要的理论意义[11-14]. 受文献[9-10,13,15-16]中研究工作的启发，本文在一般实线性空间中利用代数内部和代数闭包等工具，研究了集值向量优化问题广义 E-Benson 真有效解的一些代数性质，在适当的广义凸性条件下建立了广义 E-Benson 真有效解的一些线性标量化结果、拉格朗日乘子定理和鞍点定理.

1　预备知识

本文假定 X,Y,Z 均为一般实线性空间，Y^*,Z^* 分别为 Y 和 Z 的代数对偶空间，K,P 分别为线性空间 Y 和 Z 中具有非空代数内部的闭凸锥. 设 $A\subset Y$，文献[11,16-18]中给出了代数内部、代数闭包、代数对偶锥、严格代数对偶锥和回收锥的定义如下：

$$A^i=\{y\in Y\mid \forall h\in Y,\ \exists \varepsilon>0,\ \forall t\in[0,\varepsilon],\ x+th\in A\}$$

$$\mathrm{vcl}\,A=\{y\in Y\mid \exists h\in Y,\ \forall \varepsilon>0,\ \exists t\in(0,\varepsilon],\ y+th\in A\}$$

$$A^+=\{\mu\in Y^*\mid\langle\mu,y\rangle\geqslant 0,\ \forall y\in A\}$$

---

① 收稿日期：2017-02-07

基金项目：重庆市科委重点基金项目(cstc2015jcyjBX0029).

作者简介：王　婷(1991-)，女，硕士，主要从事优化理论研究.

通信作者：刘学文，教授.

$$A^{+i}=\{\mu\in Y^{*}\mid\langle\mu,y\rangle>0,\ \forall y\in A\backslash\{0\}\}$$
$$A_{\infty}=\{u\in Y\mid A+\mathbb{R}_{++}u\subset A\}$$

A 在点 y 的支撑泛函定义为 $\sigma_A(y^*)=\sup_{y\in A}\{y^*(y)\}$，$\forall y^*\in Y^*$.

定义 1[6]　称 $E\subset Y$ 是关于 K 的改进集，如果 $0\notin E$ 且 $E+K=E$. Y 中关于凸锥 K 的改进集全体记为 $\mathcal{T}_Y$.

本文考虑下面的集值向量优化问题：

$$(\text{VOP})\ \min F(x)$$
$$\text{s. t. } x\in D=\{x\in S\mid G(x)\cap(-P)\neq\varnothing\}$$

其中：$S\subset X$；$F:S\rightrightarrows Y$，$G:S\rightrightarrows Z$ 是具有非空值的集值映射. 假定可行集 D 非空. 记

$$\langle\mu,F(x)\rangle=\{\langle\mu,y\rangle\mid y\in F(x)\},\ F(A)=\bigcup_{x\in A}F(x),\ \langle\mu,F(A)\rangle=\bigcup_{x\in A}\langle\mu,F(x)\rangle$$

其中 $\mu\in Y^*$，$A\subset X$，令 $L(Z,Y)$ 表示 Z 到 Y 的全体线性算子所构成的集合且

$$L^{+}=L^{+}(Z,Y)=\{T\in L(Z,Y)\mid T(P)\subset K\}$$

此外，我们称(VOP) 满足广义 Slater 约束品性，如果存在 $\hat{x}\in S$ 满足 $G(\hat{x})\cap(-\operatorname{cor}P)\neq\varnothing$.

定义 2[10]　设 $E\in\mathcal{T}_Y$，$A\subset Y$. 称 $a\in A$ 是 A 的广义 E-Benson 真有效点，若

$$\operatorname{clcone}(A+E-a)\cap(-E_{\infty})=\{0\}$$

本文在一般实线性空间中基于向量闭包提出广义 E-Benson 真有效点的定义如下：

定义 3　设 K 的代数内部非空，$E\in\mathcal{T}_Y$，$A\subset Y$. 称 $a\in A$ 是 A 的广义 E-Benson 真有效点，若

$$\operatorname{vclcone}(A+E-a)\cap(-E_{\infty})=\{0\}$$

记为 $a\in O_{BS}^{E_\infty}(A)$.

定义 4　称$(\bar{x},\bar{y})$ 是(VOP) 的广义 E-Benson 真有效点，若 $\bar{y}\in F(\bar{x})\cap O_{BS}^{E_\infty}(F(D))$.

定义 5[15]　设 $E\in\mathcal{T}_Y$. 称 $F(x)$ 在 D 上是邻近 E-次似凸的，若 $\operatorname{vclcone}(F(D)+E)$ 是凸集.

引理 1[11]　假设 M 和 N 是两个具有非空代数内部的向量闭凸集且 N^{+} 的代数内部非空，如果 $M\cap N=\{0\}$，则存在线性泛函 $\mu\in Y^*\backslash\{0_{Y^*}\}$ 使得对任意的 $m\in M$，$n\in N$，$\langle\mu,n\rangle\geqslant\langle\mu,m\rangle$ 且对任意的 $n\in N\backslash\{0\}$ 有 $\langle\mu,n\rangle>0$.

2　广义 E-Benson 真有效解的线性标量化

考虑标量化问题：

$$(\text{VOP})_\mu\ \min_{x\in D}\langle\mu,F(x)\rangle,\ \mu\in Y^*\backslash\{0_{Y^*}\}$$

称$(\bar{x},\bar{y})$ 是$(\text{VOP})_\mu$ 的 E-最优点，若对任意 $x\in D$，$y\in F(x)$，$\langle\mu,y-\bar{y}\rangle\geqslant\sigma_{-E}(\mu)$.

引理 2　设 K 的代数内部非空，则 E_{∞}^{+} 的代数内部非空.

证　由于 K 的代数内部非空且 $K\subset E_{\infty}$，故 E_{∞} 的代数内部非空.

由回收锥的定义可知，E_{∞} 是一个凸锥，下面证明 $0\notin\operatorname{cor}E_{\infty}$.

反设 $0\in\operatorname{cor}E_{\infty}$，则对任意 $h\in E$，存在 $\lambda>0$ 使得 $-\lambda h\in E_{\infty}$.

由于 E_{∞} 是一个凸锥，故 $-h\in E_{\infty}$. 由回收锥的定义可得 $0\in E$，矛盾.

综上所述 E_{∞} 是一个代数内部非空的凸锥且 $0\notin\operatorname{cor}E_{\infty}$，故由文献[19] 中的引理 3.2.2 可知 E_{∞}^{+} 的代数内部非空.

定理 1　设 $E\in\mathcal{T}_Y$ 且 $F-\bar{y}$ 是邻近 E-次似凸的，则$(\bar{x},\bar{y})$ 是(VOP) 的广义 E-Benson 真有效点当且仅当存在 $\mu\in E_{\infty}^{+i}$ 使得$(\bar{x},\bar{y})$ 是$(\text{VOP})_\mu$ 的 E-最优点.

证　假设存在 $\mu\in E_{\infty}^{+i}$ 使得$(\bar{x},\bar{y})$ 是$(\text{VOP})_\mu$ 的 E-最优点. 令

$$d\in\operatorname{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})\cap(-E_{\infty})$$

由 $E\in\mathcal{T}_Y$ 知

$$d\in\operatorname{vclcone}(F(D)+E+E_{\infty}-\bar{y})\cap(-E_{\infty})$$

从而存在 $h\in Y$，对任意的 $\lambda>0$，存在 $\lambda'\in(0,\lambda]$，使得

$$d+\lambda' h \in \mathrm{cone}(F(D)+E-\bar{y})$$

由$(\bar{x}, \bar{y})$是$(\mathrm{VOP})_\mu$的E-最优点可知，对任意的$y \in F(D)$有$\langle \mu, y-\bar{y}\rangle \geqslant \sigma_{-E}(\mu)$，即对任意的$e \in E$和$y \in F(D)$有$\langle \mu, y+e-\bar{y}\rangle \geqslant 0$. 所以

$$\langle \mu, d\rangle + \lambda' \langle \mu, h\rangle = \langle \mu, d+\lambda' h\rangle \geqslant 0$$

又由$\mu \in E_\infty^{+i}$且$d \in -E_\infty$可知$\langle \mu, d\rangle \leqslant 0$. 因此$\langle \mu, d\rangle = 0$. 进而可得$d=0$. 从而

$$\bar{y} \in F(\bar{x}) \cap O_{BS}{}^{E_\infty}(F(D))$$

反之，假设$(\bar{x}, \bar{y})$是(VOP)的广义E-Benson真有效点，则$\bar{x} \in D$，$\bar{y} \in F(\bar{x})$且

$$\mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y}) \cap (-E_\infty) = \{0\} \tag{1}$$

由E的代数内部非空且$E=E+E_\infty$可知，

$$\mathrm{cor}(\mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})) \neq \varnothing$$

又由$F-\bar{y}$的邻近E-次似凸性可知$\mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})$是凸集. 从而由(1)式与引理1,2可知，存在$\mu \in Y^* \backslash \{0_{Y^*}\}$使得对任意的$z \in \mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})$和$k \in E_\infty \backslash \{0\}$有

$$\langle \mu, z\rangle \geqslant 0 > \langle \mu, -k\rangle \tag{2}$$

由(2)式可知$\mu \in E^{+i}$，进而有

$$F(D)+E-\bar{y} \subset \mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y}) \tag{3}$$

由(2)式和(3)式可知，对任意$x \in D$，$y \in F(x)$，$\langle \mu, y-\bar{y}\rangle \geqslant \sigma_{-E}(\mu)$.

3 广义E-Benson真有效解的拉格朗日乘子定理

本节考虑如下向量优化问题：

$$(\mathrm{UVP}): \min F(x)+T(G(x)),\ s.\ t.\ x \in S$$

定理2 设$E \in \mathscr{T}_Y$，$E \subset K$且(F, G)在S上是邻近$(E \times P)$-次似凸的且(VOP)满足广义Slater约束品性. 若$(\bar{x}, \bar{y})$是(VOP)的广义E-Benson真有效点且$0 \in G(\bar{x})$，则存在$T \in L^+(Z, Y)$使得$-T(G(\bar{x}) \cap (-P)) \subset (\mathrm{cor}E_\infty \cup \{0\}) \backslash \mathrm{cor}E$且$(\bar{x}, \bar{y})$是(UVP)的广义$E$-Benson真有效点.

证 因为$(\bar{x}, \bar{y})$是(VOP)的广义E-Benson真有效点，所以由定理1可知，存在$\mu \in E_\infty^{+i}$使得对任意的$x \in S$和$y \in F(x)$有

$$\langle \mu, y-\bar{y}\rangle \geqslant \sigma_{-E}(\mu) \tag{4}$$

令$H: S \rightrightarrows R \times Z$为

$$H(x) = \langle \mu, F(x)-\bar{y}\rangle \times G(x) = (\mu F, G)(x) - (\langle \mu, \bar{y}\rangle, 0_Z)$$

由(F, G)在S上是邻近$(E \times P)$-次似凸可知，H在S上是邻近$(\mu E \times P)$-次似凸的，进一步由(4)式可知系统

$$x \in S,\ H(x) \cap (-\mathrm{cor}(\mu E \times P)) \neq \varnothing$$

无解. 由定理1知存在$(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times P^+ \backslash \{(0, 0_{Z^*})\}$使得对任意的$x \in S$，$y \in F(x)$和$z \in G(x)$有

$$\lambda\langle \mu, y-\bar{y}\rangle - \sigma_{-\mu E}(\lambda) + \langle \varphi, Z\rangle - \sigma_{-P}(\varphi) \geqslant 0$$

即对任意的$x \in S$，$y \in F(x)$，$z \in G(x)$，$e \in E$和$z' \in P$有

$$\lambda\langle \mu, y-\bar{y}\rangle + \langle \varphi, Z\rangle \geqslant \sigma_{-\mu E}(\lambda) + \sigma_{-P}(\varphi) = \sup_{\bar{e} \in -E}\langle \lambda, \mu\bar{e}\rangle + \sup_{\bar{z} \in -P}\langle \varphi \bar{z}\rangle \geqslant \langle \lambda, -e\mu\rangle + \langle \varphi, -z'\rangle \tag{5}$$

令(5)式中$z'=0$，则对任意的$x \in S$，$y \in F(x)$，$z \in G(x)$和$e \in E$有

$$\langle \lambda, y-\bar{y}+e\rangle + \langle \varphi, z\rangle \geqslant 0 \tag{6}$$

由G满足slater约束品性和(6)式可知$\lambda > 0$. 取$\bar{k} \in \mathrm{cor}E_\infty$，则$\lambda\langle \mu, \bar{k}\rangle = 1$. 定义$T: Z \longrightarrow Y$为

$$T(z) = \lambda\langle \varphi, z\rangle \bar{k} \tag{7}$$

显然$T \in L^+(Z, Y)$. 令(6)式中$x=\bar{x}$，$y=\bar{y}$，$z=\bar{z} \in G(\bar{x}) \cap (-P)$，则

$$-\lambda\langle \mu, e\rangle \leqslant \langle \varphi, \bar{z}\rangle \leqslant 0 \tag{8}$$

由(8)式右端不等式可知$-T(\bar{z}) = -\langle \varphi, \bar{z}\rangle \bar{k} \in \mathrm{cor}E_\infty \cup \{0\}$，由(8)式左端不等式可知$-T(\bar{z}) \notin \mathrm{cor}E$. 否则，由$\mathrm{cor}E = E + \mathrm{cor}E_\infty$可知存在$\bar{e} \in E$使得$-T(\bar{z}) - \bar{e} \in \mathrm{cor}E_\infty$. 因此$\langle \varphi, \bar{z}\rangle + \lambda\langle \mu, \bar{e}\rangle < 0$，这与(8)

式矛盾. 由 $\bar{z}$ 的任意性可知

$$-T(G(\bar{x})\cap(-P))\subset(\mathrm{cor}E_{\infty}\cup\{0\})\backslash\mathrm{cor}E$$

进一步地，由 $T\in L^{+}(Z,Y)$，且 $0\in G(\bar{x})$ 可知 $0\in T(G(\bar{x}))$，因此

$$\bar{y}\in F(\bar{x})\subset F(\bar{x})+T(G(\bar{x})$$

由(6) 式和(7) 式可知，对任意的 $x\in S$，$y\in F(x)$，$z\in G(x)$，$e\in E$ 有

$$\lambda\langle\mu,y+T(z)\rangle=\lambda\langle\mu,y\rangle+\langle\varphi,z\rangle\langle\mu,\bar{k}\rangle=\lambda\langle\mu,y\rangle+\langle\mu,y\rangle\geqslant\lambda\langle\mu,\bar{y}-e\rangle$$

因此，$(\bar{x},\bar{y})$ 是$(\mathrm{UVP})_{\mu}$ 的E 最优点，由 $\mu\in E_{\infty}^{+i}$ 和定理 1 可知$(\bar{x},\bar{y})$ 是无约束向量优化问题(UVP) 的广义 E-Benson 真有效点.

定理 3　设 $E\in\mathcal{T}_{Y}$，$\bar{x}\in D$ 且 $\bar{y}\in F(\bar{x})$. 如果存在 $T\in L^{+}(Z,Y)$ 使得 $0\in T(G(\bar{x}))$ 且$(\bar{x},\bar{y})$ 是(UVP) 的广义 E-Benson 真有效点，则$(\bar{x},\bar{y})$ 是(VOP) 的广义 E-Benson 真有效点.

证　由假设条件可知 $\bar{y}\in F(\bar{x})\subset F(\bar{x})+T(G(\bar{x}))$ 且

$$\mathrm{vclcone}(\bigcup_{x\in S}F(x)+T(G(x))+E-\bar{y})\cup(-E_{\infty})=\{0\}\tag{9}$$

由 $x\in S$ 可知$G(x)\cap(-P)\neq\emptyset$，则存在 $z\in G(x)$，使得 $z\in(-P)$，从而 $-T(z)\in E_{\infty}$. 因此

$$E_{\infty}\subset T(z)+E_{\infty}\subset T(G(x))+E_{\infty}$$

又因为 $E\in\mathcal{T}_{Y}$，所以

$$F(D)+E-\bar{y}=\bigcup_{x\in D}(F(x)+E-\bar{y})\subset$$
$$\bigcup_{x\in D}(F(x)+T(G(x))+E+E_{\infty}-\bar{y})\subset\bigcup_{x\in S}(F(x)+T(G(x)))+E-\bar{y}$$

因此

$$0\in\mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})\subset\mathrm{vclcone}(\bigcup_{x\in S}(F(x)+T(G(x))+E-\bar{y}))$$

结合(9) 式可知

$$\mathrm{vclcone}(F(D)+E-\bar{y})\cap(-E_{\infty})=\{0\}$$

显然 $\bar{x}\in D$，$\bar{y}\in F(\bar{x})\subset F(D)$ 且

$$\bar{y}\in F(\bar{x})\cap O_{BS}^{E_{\infty}}(F(D))$$

故$(\bar{x},\bar{y})$ 是(VOP) 的广义 E-Benson 真有效点.

参考文献：

[1] CHEN G Y，HUANG，X X，YANG X Q. Vector Optimization [M]. Berlin：Springer-Verlag，2005.

[2] LUC D T. Theory of Vector Optimization [M]. Berlin：Springer-Verlag，1989.

[3] BENSON H P. An Improved Definition of Proper Efficiency for Vector Maximization with Respect to Cones [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1979，71(1)：232－241.

[4] CHEN G Y，RONG W D. Characterizations of the Benson Proper Efficiency for Nonconvex Vector Optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1998，98(2)：365－384.

[5] YANG X M，LI D，WANG S Y. Near-Subconvexlikeness in Vector Optimization with Set-Valued Functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，110(2)：413 - 427.

[6] GUTIÉRREZ C，JIMÉNEZ B，NOVO V. Improvement Sets and Vector Optimization [J]. European Journal of Operations Research，2012，223(223)：304－311.

[7] ZHAO K Q，CHEN G Y，YANG X M. Approximate Proper Efficiency in Vector Optimization [J]. Optimization，2015，64(8)：1777－1793.

[8] ZHAO K Q，XIA Y M，YANG X M. Nonlinear Scalarization Characterizations of E-efficiency in Vector Optimization [J]. Taiwanese Journal of Mathematics，2015，19(2)：455－466.

[9] ZHAO K Q，YANG X M. E-Benson Proper Efficiency in Vector Optimization [J]. Optimization，2013，64(4)：1－14.

[10] 廖　伟. 向量优化问题中的近似解研究 [D]. 重庆：重庆师范大学，2014.

[11] ADÁN M，NOVO V. Proper Efficiency in Vector Optimization on Real Linear Spaces [J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2004，121(3)：515－540.

[12] BAO T Q，MORRUKHOVICH B S. Relative Pareto Minimizers for Multiobjective Problems：Existence and Optimality

Conditions [J]. Mathematical Programming, 2010, 122(2): 301-347.

[13] ZHOU Z A, YANG X M, PENG J W. Optimality Conditions of Set-Valued Optimization Problem Involving Relative Algebraic Interior in Ordered Linear Spaces [J]. Optimization, 2014, 63(3): 433-446.

[14] XIA Y M, ZHANG W L, ZHAO K Q. Characterizations of Improvement Sets via Quasi Interior and Applications in Vector Optimization [J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 769-780.

[15] 林 安. 改进集的性质及其在向量优化中的应用 [D]. 重庆: 重庆师范大学, 2016.

[16] 史树中. 凸分析 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.

[17] ROCKAFELLAR R T. Convex Analysis [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[18] 林 安, 赵克全. 向量优化中改进集的一些注记 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2014, 36(9): 100-103.

[19] 杜青香. 实序线性空间中 *E*-Benson 真有效解的性质研究 [D]. 重庆: 重庆师范大学, 2015.

Algebraic Characterizations of Generalized E-Benson Proper Efficient Solutions in Vector Optimization

WANG Ting[1], LIU Xue-wen[2]

1. *Chongqing Xizang Middle School, Chongqing 400036, China;*

2. *Chongqing Normal University, Department of Graduate, Chongqing 401331, China*

Abstract: In this paper, under some suitable generalized convexity and by means of algebraic interior and algebraic closure, algebraic characterizations of generalized E-Benson proper efficient solutions have been researched for vector optimization problems with set-valued maps, linear scalarization result, Lagrange multiplier theorem and saddle point theorem are established for generalized E-Benson proper efficient solutions.

Key words: vector optimization; generalized E-Benson proper efficient solutions; algebraic interior; linear scalarization; Lagrange multiplier

责任编辑 张 枸