第 44 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 1 月
Vol. 44 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.01.007

一类拟线性抛物-椭圆趋化增长系统解的全局有界性①

张 颖, 赵志新, 张优佳, 龙 萍, 罗艳妮

重庆邮电大学 理学院,重庆 400065

摘要: 讨论了一类拟线性抛物-椭圆趋化增长系统初边值问题,利用先验估计、L^p 估计的技巧,得到了该模型解的全局存在性和有界性.

关 键 词: 拟线性;趋化性;有界性

中图分类号:O175 **文献标志码:A** **文章编号:** 1000-5471(2019)01-0034-06

趋化性即由介质中化学物质的浓度差异形成的刺激所引起的趋向性,有正趋化性和负趋化性两种. 著名的趋化模型[1] 最初是由 Keller-Segel 在 1970 年提出的,它详细刻画了细胞的正趋化性,即细胞的趋化吸引现象.

因此,本文考虑如下一类拟线性抛物－椭圆的趋化增长系统

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^\beta - \chi \nabla \cdot (u^m \nabla w) + \mu u(1-u^\alpha), & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ -\Delta w + w = u^\gamma & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \upsilon} = \dfrac{\partial w}{\partial \upsilon} = 0 & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中:$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域;$N \geqslant 3$;χ,μ,m,α,γ 和 β 为正参数,并且满足 $m \geqslant 1$ 和 $\gamma \geqslant 1$. 文献[2] 证明,当 $\beta = 1$,如果 $\alpha > m+\gamma-1$ 或 $\alpha = m+\gamma-1$ 且 $\mu > \dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$,则对于任何给定的非负初值函数 $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$,该方程存在全局有界的经典解;文献[3] 证明了在 $N \leqslant 2$ 或 $\mu > \dfrac{N-2}{N}\chi$ 的情况下,方程对于任意的初值有唯一的全局有界经典解;文献[4] 进一步表明,对于任意给定初值,方程组(1) 有唯一的全局有界经典解的结论仍然适用于 $\beta = 1$ 的临界情况 $\alpha = m+\gamma-1$ 且 $\mu = \dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$.

基于已有的研究,本文进一步研究了在 $\beta > 1$ 的情况下方程组的解 (u,w) 在任意给定的非负初值函数 $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 的情况下的有界性. 具体结论如下:

定理 1 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域,$N \geqslant 3$,$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$ 都是正参数,且满足

$$m \geqslant 1,\ \gamma \geqslant 1,\ \beta > 1$$

若下列 3 个条件之一成立,

(I) $\alpha > m+\gamma-1$.

(II) $\alpha = m+\gamma-1$ 且 $\mu > \dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$.

---

① 收稿日期:2017-07-08

基金项目:重庆邮电大学宜伦实验班教育教学改革项目(2014YL-12),重庆邮电大学大学生科研训练计划(A2016-56)..

作者简介:张 颖(1996-),学士,主要从事偏微分方程研究.

通信作者:赵志新,硕士研究生.

(III) $\alpha = m + \gamma - 1$ 且 $\mu = \dfrac{N\alpha - 2}{2(m-1) + N\alpha}\chi$.

则对于任意给定的非负初值函数 $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$，方程组存在全局经典解 (u, w) 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 上有界，即存在常数 $C > 0$ 使得

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\Omega)} + \| w(\cdot, t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C,\ t > 0$$

注：为了方便以下证明中将 $\int_\Omega u\,\mathrm{d}x$ 简写为 $\int_\Omega u$.

引理 1　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域，$N \geqslant 3$，$\chi, \mu, m, \alpha, \gamma, \beta$ 都是正参数且满足 $m \geqslant 1$，$\gamma \geqslant 1$，$\beta > 1$，若一个非负的初值函数 $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$，则存在 $T_{max} \in (0, \infty]$ 使得方程组(1) 的解 (u, w) 在 $\Omega \times (0, T_{\max})$ 上满足

$$(u, w) \in (C^0(\overline{\Omega} \times [0, T_{\max})) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T_{\max})))^2$$

且 $\Omega \times (0, T_{\max})$ 上的非负函数 u 和 w 使得

$$T_{\max} = \infty$$

或

$$\limsup_{t \to T_{\max}} \| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

证　利用半群理论和不动点理论可以证明方程解的局部存在性，详细证明参考文献[3,5]. 由最大值原理可得函数 u 的非负性，同时也得出了函数 w 的非负性.

引理 2　在定理 1 的条件下，方程组(1) 的解满足

$$\int_\Omega u \leqslant C_1 := \max\left\{\int_\Omega u_0,\ |\Omega|\right\}$$

证　对方程组(1) 的第一个方程积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u = \int_\Omega \Delta u^\beta - \chi\int_\Omega \nabla \cdot (u^m \nabla w) + \mu\int_\Omega u(1 - u^\alpha) =$$

$$\mu\int_\Omega u - \mu\int_\Omega u^{1+\alpha}$$

利用 Hölder 不等式，得 $\int_\Omega u^{1+\alpha} \geqslant \dfrac{1}{|\Omega|^\alpha}\left(\int_\Omega u\right)^{1+\alpha}$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u \leqslant \mu\int_\Omega u - \frac{\mu}{|\Omega|^\alpha}\left(\int_\Omega u\right)^{1+\alpha}$$

由常微分方程的比较原理，存在 $C_1 := \max\left\{\int_\Omega u_0,\ |\Omega|\right\}$ 使得引理成立.

引理 2 证明了 $\| u(\cdot, t) \|_{L^1(\Omega)}$ 的有界性，为了证明 $\| u(\cdot, t) \|_{L^p(\Omega)}$ 的有界性需要以下引理.

引理 3　设 $1 < p < +\infty$，在定理 1 的条件下，方程组(1) 的解满足

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + \frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2 \leqslant \chi\frac{p-1}{p+m-1}\int_\Omega u^{p+m+\gamma-1} + \mu\int_\Omega u^p - \mu\int_\Omega u^{p+\alpha} \tag{2}$$

证　对方程组第一个方程乘以 u^{p-1}，并积分得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + \beta(p-1)\int_\Omega u^{\beta+p-3}|\nabla u|^2 = \chi(p-1)\int_\Omega u^{p+m-2}\nabla u \cdot \nabla w + \mu\int_\Omega u^p - \mu\int_\Omega u^{p+\alpha} \tag{3}$$

对第二个方程乘以 u^{m+p-1}，并积分得

$$(m+p-1)\int_\Omega u^{p+m-2}\nabla u \cdot \nabla w = -\int_\Omega u^{m+p-1}w + \int_\Omega u^{m+p+\gamma-1} \tag{4}$$

把(4) 式代入(3) 式得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p + \frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2 =$$

$$-\frac{\chi(p-1)}{m+p-1}\int_\Omega u^{m+p-1}w + \frac{\chi(p-1)}{m+p-1}\int_\Omega u^{m+p+\gamma-1} + \mu\int_\Omega u^p - \mu\int_\Omega u^{p+\alpha} \leqslant$$

$$\chi\frac{p-1}{p+m-1}\int_\Omega u^{p+m+\gamma-1} + \mu\int_\Omega u^p - \mu\int_\Omega u^{p+\alpha}$$

即引理得证.

首先分别证明在条件 I,II,III 下 $\| u \|_{L^p(\Omega)}$ 的有界性.

引理4 设$\Omega\subset\mathbb{R}^N$是一个边界光滑的有界区域，$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$都是正参数且$m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若$\alpha>m+\gamma-1$，则在$1<p<\infty$时，存在常数$C_2>0$使得

$$\int_\Omega u^p\leqslant C_2,\ t\in(0,\ T_{\max})\tag{5}$$

证 由$\alpha>m+\gamma-1$，知$\alpha+p>p+m+\gamma-1$，利用Young不等式得

$$\int_\Omega u^{p+m+\gamma-1}\leqslant\varepsilon_1\int_\Omega u^{p+\alpha}+c_1(\varepsilon_1,\ p,\ \alpha,\ \gamma,\ m,\ |\Omega|)$$

且

$$\int_\Omega u^p\leqslant\varepsilon_2\int_\Omega u^{p+\alpha}+c_2(\varepsilon_2,\ p,\ \alpha,\ \gamma,\ m,\ |\Omega|)$$

对于给定的正常数$\varepsilon_1,\varepsilon_2$，存在一个$\varepsilon<\mu$，使得

$$\chi\frac{p-1}{p+m-1}\int_\Omega u^{p+m+\gamma-1}+\mu\int_\Omega u^p\leqslant(\mu-\varepsilon)\int_\Omega u^{p+\alpha}+c(\varepsilon,\ p,\ \alpha,\ \gamma,\ m,\ |\Omega|)\tag{6}$$

将不等式(6)代入(2)式得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2\leqslant-\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}+c(\varepsilon)\tag{7}$$

利用Hölder不等式有$\int_\Omega u^{p+\alpha}\geqslant\frac{1}{|\Omega|^{\frac{\alpha}{p}}}(\int_\Omega u^p)^{\frac{\alpha+p}{p}}$，因此有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p\leqslant-\frac{\varepsilon}{|\Omega|^{\frac{\alpha}{p}}}\left(\int_\Omega u^p\right)^{\frac{\alpha+p}{p}}+c$$

由常微分方程的比较原理，存在$C_2:=\max\left\{\int_\Omega u_0^p,\ \left(\frac{c}{\varepsilon}|\Omega|^{\frac{\alpha}{p}}\right)^{\frac{p}{p+\alpha}}\right\}$使得引理成立.

引理5 设$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$都是正参数且$m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若$\alpha=m+\gamma-1$且$\mu>\frac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，令

$$p_1=1+\frac{m\mu}{\chi-\mu},\ A(p)=\frac{(p-1)\chi}{m+p-1}-\mu$$

则$p\in(1,\ p_1]$时$A(p)\leqslant 0$，$p\in(p_1,\ \infty)$时$A(p)>0$.

证 对几个参数进行代数运算可得证明，详细证明参见文献[2].

引理6 设$\Omega\subset\mathbb{R}^N$是一个边界光滑的有界区域，$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$都是正参数且$m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若$\alpha=m+\gamma-1$且$\mu>\frac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，则对于任意的$p\in(1,\ p_1]$($p_1$定义见引理5)，不等式(5)成立.

证 由$\alpha=m+\gamma-1$，(2)式化为

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2\leqslant\mu\int_\Omega u^p+A(p)\int_\Omega u^{p+\alpha}\tag{8}$$

由引理5知$A(p)\leqslant 0$，设$\varepsilon:=-\frac{1}{2}A(p)$，则由Young不等式得

$$\mu\int_\Omega u^p\leqslant\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}+c(\varepsilon)$$

即有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2\leqslant-\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}+c(\varepsilon)$$

和引理4的(7)式相同，以下详细证明与引理4相同，引理得证.

引理7 设$\Omega\subset\mathbb{R}^N$是一个边界光滑的有界区域，$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$都是正参数且$m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若$\alpha=m+\gamma-1$且$\mu>\frac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，则对于任意的$p\in(p_1,\ \infty)$(此时$p_1$如引理5定义)，不等式(5)成立.

证 由引理6知$\int_\Omega u^{p_1}$有界，令$\int_\Omega u^{p_1}\leqslant C_3$，对(8)式两边加上$\int_\Omega u^p$有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\int_\Omega u^p+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^2\leqslant(\mu+1)\int_\Omega u^p+A(p)\int_\Omega u^{p+\alpha}\tag{9}$$

此时 $A(p)>0$，令 $\varepsilon:=A(p)$，利用 Young 不等式有

$$(\mu+1)\int_\Omega u^p \leqslant \varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}+c_1(p)$$

代入(9)式有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\int_\Omega u^p+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega \left|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\right|^2 \leqslant 2\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}+c_1(p)$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\begin{aligned}2\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}=2\varepsilon\left\|u^{\frac{p+\beta-1}{2}}\right\|_{L^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}} \leqslant \\ c_2(p)\left\|\nabla u^{\frac{p+\beta-1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}\lambda}\cdot\left\|u^{\frac{p+\beta-1}{2}}\right\|_{L^{\frac{2p_1}{p+\beta-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}(1-\lambda)}+c_2(p)\left\|u^{\frac{p+\beta-1}{2}}\right\|_{L^{\frac{2p_1}{p+\beta-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}} \leqslant \\ c_2(p)\cdot C_3^{(p+\alpha)(1-\lambda)}\cdot\left\|\nabla u^{\frac{p+\beta-1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}\lambda}+c_2(p)\cdot C_3^{p+\alpha}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{p+\beta-1}{2(p+\alpha)}=\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)+(1-\lambda)\frac{p+\beta-1}{2p_1}$$

得

$$\lambda=\frac{N(p+\beta-1)(p_1-\alpha-p)}{(\alpha+p)(Np_1-2p_1-N\beta-Np+N)}$$

又由 $\mu>\dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$ 得

$$\frac{N\alpha}{2}<\frac{\chi+\mu(m-1)}{\chi-\mu}=p_1$$

即有 $0<\lambda<1$，且

$$\lambda\frac{2(p+\alpha)}{p+\beta-1}=\frac{2N(p+\alpha-p_1)}{Np+N\beta+2p_1-Np_1-N}<2$$

利用 Young 不等式得

$$2\varepsilon\int_\Omega u^{p+\alpha}\leqslant\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\int_\Omega\left|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\right|^2+c_3$$

令 $c(p):=c_1(p)+c_3$，则

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\int_\Omega u^p\leqslant c(p)$$

根据常微分方程的比较原理，存在 $C_2:=\max\{\int_\Omega u_0,\ c(p)\}$ 使得引理成立.

引理 8　设 $N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$ 都是正参数且 $m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，有 $\alpha=m+\gamma-1$ 且 $\mu=\dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，又 $1<p<\infty$，令

$$p_0=\frac{1}{1-\dfrac{\mu}{\chi}},\ p_2=1+(p_0-1)m,\ B(p)=\frac{p-1}{p+m-1}-\frac{\mu}{\chi}$$

则

$$p_0=\frac{2(m-1)+N\alpha}{2m}\geqslant 1,\ p_2=\frac{N\alpha}{2}$$

且 $p\in(1,\ p_2]$ 时 $B(p)\leqslant 0$，$p\in(p_2,\ \infty)$ 时 $B(p)>0$.

证　进行简单的代数运算可得证明，详细证明参考文献[4].

引理 9　设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个边界光滑的有界区域，$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$ 都是正参数且 $m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若 $\alpha=m+\gamma-1$ 且 $\mu=\dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，则对任意的 $p\in(1,\ p_2]$(p_2 定义见引理 8)，存在 $C_4>0$ 使得

$$\int_\Omega u^p\leqslant C_4,\ t\in(0,\ T_{\max}) \tag{10}$$

证 $B(p)$ 代入不等式(2)得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}u^{p}+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^{2}}\int_{\Omega}|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^{2}\leqslant(\mu+1)\int_{\Omega}u^{p}+\chi B(p)\int_{\Omega}u^{p+\alpha}$$

又由 $B(p)\leqslant 0$，有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}u^{p}+\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^{2}}\int_{\Omega}|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}|^{2}\leqslant(\mu+1)\int_{\Omega}u^{p}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式得

$$\begin{aligned}(\mu+1)\int_{\Omega}u^{p}&=(\mu+1)\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{\frac{2p}{\beta+p-1}}\leqslant\\&c\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{\lambda\frac{2p}{\beta+p-1}}\cdot\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{(1-\lambda)\frac{2p}{\beta+p-1}}+c\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{\frac{2p}{\beta+p-1}}\leqslant\\&c\cdot C_{1}^{(1-\lambda)p}\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{\lambda\frac{2p}{\beta+p-1}}+c\cdot C_{1}^{p}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\beta+p-1}{2p}=\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)+(1-\lambda)\frac{\beta+p-1}{2}$$

得

$$\lambda=\frac{N(p-1)(\beta+p-1)}{p(N\beta+Np+2-2N)}=\frac{N\beta p+Np^{2}-2Np-N(\beta-1)}{N\beta p+Np^{2}-2Np+p}$$

由 $\beta>1$，$N\geqslant 2$ 且 $1<p\leqslant p_{2}$，即有 $0<\lambda<1$. 又

$$\lambda\frac{2p}{\beta+p-1}=\frac{2(Np-N)}{N\beta+Np+2-2N}<2$$

根据 Young 不等式

$$(\mu+1)\int_{\Omega}\leqslant\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^{2}}\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{2}+c(p)$$

因此有

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}u^{p}+\int_{\Omega}u^{p}\leqslant c(p)$$

根据常微分方程的比较原理，存在 $C_{4}:=\max\{\int_{\Omega}u_{0}^{p},c(p)\}$ 使得引理成立.

引理 10 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^{N}$ 是一个边界光滑的有界区域，$N\geqslant 3$，$\chi,\mu,m,\alpha,\gamma,\beta$ 都是正参数且 $m\geqslant 1$，$\gamma\geqslant 1$，$\beta>1$，若 $\alpha=m+\gamma-1$ 且 $\mu=\dfrac{N\alpha-2}{2(m-1)+N\alpha}\chi$，则对任意的 $p\in(p_{2},+\infty)$，存在 $C_{4}>0$ 使得不等式(10)成立.

证 由引理 9 知 $\int_{\Omega}u$ 在 $p\in(1,p_{2}]$ 上有界，令

$$\int_{\Omega}u^{p_{2}}\leqslant C_{5},\ t\in(0,T_{\max})$$

由 Young 不等式得

$$(\mu+1)\int_{\Omega}u^{p}+\chi B(p)\int_{\Omega}u^{p+\alpha}\leqslant 2\chi B(p)\int_{\Omega}u^{p+\alpha}+c_{1}$$

利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式有

$$\begin{aligned}2\chi B(p)\int_{\Omega}u^{p+\alpha}&=2\chi B(p)\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}\leqslant\\&c_{2}(p)\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{\lambda\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}\cdot\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p_{2}}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{(1-\lambda)\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}+\|u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{\frac{2p_{2}}{\beta+p-1}}(\Omega)}^{\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}=\\&c_{2}(p)\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{\lambda\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}\cdot\|u\|_{L^{p_{2}}(\Omega)}^{(1-\lambda)(p+\alpha)}+\|u\|_{L^{p_{2}}(\Omega)}^{p+\alpha}\leqslant\\&c_{2}(p)\cdot C_{5}^{(1-\lambda)(p+\alpha)}\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\|_{L^{2}(\Omega)}^{\lambda\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}}+c_{2}(p)\cdot C_{5}^{p+\alpha}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\beta+p-1}{2(p+\alpha)}=\lambda\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)+(1-\lambda)\frac{\beta+p-1}{2p_{2}}$$

得

$$\lambda=\frac{N(p+\alpha+p_2)(\beta+p-1)}{(p+\alpha)(N\beta+Np+2p_2-N-Np_1)}$$

根据参数条件及 $p>p_2=\frac{N\alpha}{2}$，得 $0<\lambda<1$，又有

$$\lambda\frac{2(p+\alpha)}{\beta+p-1}=\frac{2N(p+\alpha+p_2)}{N\beta+Np+2p_2-N-Np_2}<2$$

因此由 Young 不等式有

$$2\chi B(p)\int_\Omega u^{p+\alpha}\leqslant\frac{4\beta(p-1)}{(\beta+p-1)^2}\left\|\nabla u^{\frac{\beta+p-1}{2}}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c_3$$

即有 $c_4:=c_1+c_3$ 使得

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u^p+\int_\Omega u^p\leqslant c_4$$

利用常微分方程的比较原理，存在 $C_4:=\max\{\int_\Omega u_0^p,c_4\}$ 使得引理成立.

上面分别证明了在 3 种参数条件下 $\|u\|_{L^p(\Omega)}$ 的有界性，其中 $1<p<\infty$. 下面证明定理 1.

定理 1 的证明　由于 $p\in(1,+\infty)$，根据方程组(1)的第二个方程和椭圆正则理论可知，存在常数 $c_1>0$ 使得

$$\|\nabla w(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c_1,\ t\in(0,T_{\max})$$

通过 Moser 迭代知，存在常数 $c_2>0$ 使得

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant c_2,\ t\in(0,T_{\max})$$

结合引理 1 可推出定理 1 的结论.

致谢：感谢重庆邮电大学理学院郑攀副教授对本文指导和建议.

参考文献：

[1] KELLER E F，SEGEL L A. Initiation of Slime Mold Aggregation Viewed as an Instability [J]. Journal of Theoretical Biology，1970，26(3)：399－415.

[2] GALAKHOV E，SALIEVA O，TELLO J I. On a Parabolic-Elliptic System with Chemotaxis and Logistic Type Growth [J]. Journal of Differential Equations，2016，261(8)：4631－4647.

[3] TELLO J I，WINKLER M. A Chemotaxis System with Logistic Source [J]. Communications in Partial Differential Equations，2007，32(6)：849－877.

[4] HU B，TAO Y. Boundedness in a Parabolic-Elliptic Chemotaxis-Growth System under a Critical Parameter Condition [J]. Applied Mathematics Letters，2017，64：1－7.

[5] HORSTMANN D，WINKLER M. Boundedness vs Blow-Up in a Chemotaxis System [J]. Journal of Differential Equations，2005，215(1)：52－107.

On Global Boundedness of Solutions in a Quasilinear Parabolic-Elliptic Chemotaxis-Growth System

ZHANG Ying，ZHAO Zhi-xin，
ZHANG You-jia，LONG Ping，LUO Yan-ni

School of Science，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，China

Abstract：In this paper，we've discussed the initial boundary value problem for a class of quasilinear parabolic-elliptic chemotaxis-growth systems，and verified the global existence and boundedness of the solution by means of some skill such as a priori estimate and L^p estimation.

Key words：quasilinear；chemotaxis；boundedness

责任编辑　张　栒