第 44 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 2 月
Vol. 44 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.001

Riesz 表示定理的推广形式①

蔺友江

重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘要:常见的 Riesz 表示定理的证明方法是通过在 f 的零空间的正交补中,构造满足表示定理公式的向量.这里给出著名的 Riesz 表示定理的一种推广形式,并尝试从不同的角度给出 Riesz 表示定理的不同证明方法.利用几何测度论的知识给出了一个直接的证明.

关 键 词:Riesz 表示定理;线性泛函;Hausdorff 测度;测度理论

中图分类号:**O186** **文献标志码**:**A** **文章编号**:1000-5471(2019)02-0001-04

Riesz 表示定理是泛函分析中的一个基本定理.匈牙利数学家 Frigyes Riesz 在不假定空间是可分的条件下证明了该定理,并且他强调,Hilbert 空间的整个理论可以以他的表示定理为基础(参考文献[1]).记 H 为任意的 Hilbert 空间,H^* 表示其对偶空间.Riesz 表示定理可以表述为(参考文献[2] 定理 3.2):

Riesz 表示定理 设 $f \subset H^*$,则存在 $y_f \subset H$,使得 f 可以表示为 $f(x) = \langle x, y_f \rangle (\forall x \in H)$,并且 $\| f \|_{H^*} = \| y_f \|_H$.

文献[2] 基于 Hilbert 空间的正规正交基,给出了 Riesz 表示定理的新证明,并明确写出连续泛函对应元的表达式.此外,在实 Hilbert 空间情形下,文献[2] 基于变分原理证明了 Riesz 表示定理.对于 Riesz 表示定理,常见的证明方法是通过在 f 的零空间的正交补中,构造满足

$$\sup\{L(f): f \in C_c(R^n; R^m), |f| \leqslant 1, \operatorname{spt}(f) \subseteq K\} < \infty$$

的元素 y_f(参考文献[3-12]).这种证明方法非常简洁,而且也体现了 Riesz 表示定理的几何意义.

与前面提到的证明方法不同,本文利用几何测度论的知识,主要利用 Hausdorff 测度理论和 Radon 测度对线性泛函的特征化,首先构造了任意集合的变分测度,并证明了该测度是一个 Radon 测度;然后构造了一个线性泛函,并证明了存在一个可测函数满足 Riesz 表示定理的条件.我们的证明方法不仅证明了一般的 Riesz 表示定理,而且给出了一个 Riesz 表示定理的推广形式.

令 $C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ 表示从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的,定义在紧支撑上的连续函数,$L: C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$ 表示一个线性泛函.一个映射 $\mu: 2^X \longrightarrow [0, \infty]$ 如果满足下面的条件:

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) 如果 $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$,那么 $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

则称 μ 为定义在 x 上的测度.一个集合 $A \subseteq X$,如果对于任意的 $B \subseteq X$,都有 $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$,那么我们称集合 A 是可测的.一个定义在 X 上的测度 μ,如果满足:对于任意的集合 $A \subseteq X$,存在 μ-可测的集合 B,使得 $A \subseteq B$ 并且 $\mu(A) = \mu(B)$,则称 μ 是正则的.如果 μ 是 Borel 的,并且对于每一个 $A \subseteq X$,

① 收稿日期:2018-09-02

基金项目:重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2015jcyjA00009);重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500628);国家自然科学基金青年科学基金项目(11501064);重庆工商大学博士科研启动项目(2015-56-02).

作者简介:蔺友江(1975-),男,副教授,主要从事凸几何分析的研究.

存在一个Borel集B，使得$A \subseteq B$并且$\mu(A)=\mu(B)$，则称μ是Borel正则的. 如果一个测度是Borel正则的，并且对于每一个紧集$K \subset \mathbb{R}^n$，都有$\mu(K)<\infty$成立，则称测度μ是一个Radon测度.

定理1 令$L: C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$是一个满足下式的线性泛函：

$$\sup\{L(f): f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leqslant 1, \operatorname{spt}(f) \subseteq K\} < \infty \tag{1}$$

其中$K \subset \mathbb{R}^n$是一个任意的紧集，那么存在$\mathbb{R}^n$上的Radon测度μ和一个μ-可测函数$\sigma: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，使得对于$\mu$-几乎所有的$x \in \mathbb{R}^n$，都有$|\sigma(x)|=1$成立，并且对于所有的$f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$，都有

$$L(f)=\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma \mathrm{d}\mu$$

为了证明定理1，我们需要证明下面的两个引理：

引理1 如果V是开集，$K \subseteq V$是紧集，那么存在$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得$\operatorname{spt}(f) \subseteq V$，并且对于所有的$x \in K$，恒有$f \equiv 1$成立.

证 因为V是开集，则存在可列个开球$\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$，使得$B(x_i, r_i) \subseteq V$并且$K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)$. 因此存在有限个开球满足$K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} B(x_i, r_i)$. 令：

$$r=\min\{r_i: i=1,\cdots,k\}$$

$$K_1=\left\{x \in \mathbb{R}^n: \text{存在 } y \in K, \text{使得 } |x-y| \leqslant \frac{r}{2}\right\}$$

定义

$$f(x)=\frac{\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n-K_1, x)}{\operatorname{dist}(K, x)+\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n-K_1, x)}$$

那么$f(x)$即为符合条件的函数.

引理2 令$C_c^{+}(\mathbb{R}^n)=\{f \in C_c(\mathbb{R}^n): f \geqslant 0\}$，并且对于任意的$f \in C_c^{+}(\mathbb{R}^n)$，令

$$\lambda(f)=\sup\{|L(g)|: g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |g| \leqslant f\} \tag{2}$$

则：

(i) 对于$f_1, f_2 \in C_c^{+}(\mathbb{R}^n)$，如果$f_1 \leqslant f_2$，那么$\lambda(f_1) \leqslant \lambda(f_2)$；

(ii) 对于任意的$f \in C_c^{+}(\mathbb{R}^n)$和$c \geqslant 0$，$\lambda(cf) \leqslant c\lambda(f)$；

(iii) 对于$f_1, f_2 \in C_c^{+}(\mathbb{R}^n)$，$\lambda(f_1+f_2)=\lambda(f_1)+\lambda(f_2)$；

(iv) 对于Radon测度μ和$f \in C_c^{+}(\mathbb{R}^n)$，$\lambda(f)=\int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu$.

证 根据(2)式，(i)和(ii)是显然的. 下面证明(iii).

令$g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$满足$|g_1| \leqslant f_1$，$|g_2| \leqslant f_2$，那么

$$|g_1+g_2| \leqslant f_1+f_2$$

不妨设$L(g_1), L(g_2) \geqslant 0$. 因此

$$|L(g_1)|+|L(g_2)|=L(g_1+g_2)=|L(g_1+g_2)| \leqslant \lambda(f_1+f_2)$$

对$g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$取上确界可得

$$\lambda(f_1)+\lambda(f_2) \leqslant \lambda(f_1+f_2)$$

另一方面，固定$g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$，其中$|g| \leqslant f_1+f_2$. 令

$$g_i=\begin{cases}\dfrac{f_i g}{f_1+f_2} & \text{如果 } f_1+f_2>0 \\ 0 & \text{如果 } f_1+f_2=0\end{cases}$$

那么$g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$，并且$g=g_1+g_2$. 显然$|g_i| \leqslant f_i (i=1,2)$，因此

$$|L(g)| \leqslant |L(g_1)|+|L(g_2)| \leqslant \lambda(f_1)+\lambda(f_2)$$

这表明$\lambda(f_1+f_2) \leqslant \lambda(f_1)+\lambda(f_2)$.

接下来，证明(iv). 令$\varepsilon \geqslant 0$，选择$0=t_0<t_1<\cdots<t_N$，其中

$$t_N=2\|f\|_{L^{\infty}} \qquad 0<t_i-t_{i-1}<\varepsilon$$

并且对于 $i=1,\cdots,N$，有 $\mu(f^{-1}\{t_i\})=0$ 成立．令 $U_j=f^{-1}((t_{j-1},t_j))$，那么 U_j 是一个开集，并且 $\mu(U_j)<\infty$．根据近似定理，存在紧集 K_j，使得 $K_j\subseteq U_j$，并且

$$\mu(U_j-K_j)<\frac{\varepsilon}{N}\qquad j=1,2,\cdots,N$$

另外存在函数 $g_j\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$，满足 $|g_j|\leqslant 1$，$\mathrm{spt}(g_j)\subseteq U_j$，并且 $|L(g_j)|\geqslant\mu(U_j)-\frac{\varepsilon}{N}$．注意到存在函数 $h_j\in C_c^+(\mathbb{R}^n)$，使得 $\mathrm{spt}(h_j)\subseteq U_j(0\leqslant h_j<1)$，且在紧集 $K_j\cup\mathrm{spt}(g_j)$ 上恒有 $h_j\equiv 1$ 成立．因此：

$$\lambda(h_j)\geqslant|L(g_j)|\geqslant\mu(U_j)-\frac{\varepsilon}{N}$$

$$\begin{aligned}\lambda(h_j)=&\sup\{|L(g)|:g\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant h_j\}\leqslant\\&\sup\{|L(g)|:g\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant 1,\ \mathrm{spt}(g)\subseteq U_j\}=\mu(U_j)\end{aligned}$$

其中 $\mu(U_j)-\frac{\varepsilon}{N}\leqslant\lambda(h_j)\leqslant\mu(U_j)$．定义集合

$$A=\left\{x:f(x)\left(1-\sum_{j=1}^N h_j(x)\right)>0\right\}$$

那么 A 是一个开集，并且

$$\mu(A)=\mu\left(\bigcup_{j=1}^N(U_j-\{h_j=1\})\right)\leqslant\sum_{j=1}^N\mu(U_j-K_j)\leqslant\varepsilon$$

因此：

$$\begin{aligned}\lambda\left(f-f\sum_{j=1}^N h_j\right)=&\sup\left\{|L(g)|:g\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant f-f\sum_{j=1}^N h_j\right\}\leqslant\\&\sup\{|L(g)|:g\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant\|f\|_{L^\infty}\chi_A\}=\\&\|f\|_{L^\infty}\sup\{L(g):g\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant\chi_A\}=\\&\|f\|_{L^\infty}\mu(A)\leqslant\varepsilon\|f\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

$$\lambda(f)=\lambda\left(f-f\sum_{j=1}^N h_j\right)+\lambda\left(f\sum_{j=1}^N h_j\right)\leqslant\varepsilon\|f\|_{L^\infty}+\sum_{j=1}^N\lambda(fh_j)\leqslant\varepsilon\|f\|_{L^\infty}+\sum_{j=1}^N t_j\mu(U_j)$$

并且

$$\lambda(f)\geqslant\sum_{j=1}^N\lambda(fh_j)\geqslant\sum_{j=1}^N t_{j-1}\left(\mu(U_j)-\frac{\varepsilon}{N}\right)\geqslant\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(U_j)-t_N\varepsilon$$

由于

$$\sum_{j=1}^N t_{j-1}\mu(U_j)\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}f\,\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{j=1}^N t_j\mu(U_j)$$

可得

$$\left|\lambda(f)-\int f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\sum_{j=1}^N(t_j-t_{j-1})\mu(U_j)+\varepsilon\|f\|_{L^\infty}+\varepsilon t_N\leqslant\varepsilon\mu(\mathrm{spt}(f))+3\varepsilon\|f\|_{L^\infty}$$

定理 1 的证明　首先我们证明存在 μ-可测函数 $\sigma:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$，满足 $L(f)=\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\sigma\mathrm{d}\mu$．对于固定的 $e\in\mathbb{R}^m$，$|e|=1$．定义 $\lambda_e(f)=L(fe)$，其中 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$．那么 λ_e 是线性的，且

$$|\lambda_e(f)|=|L(fe)|\leqslant\sup\{|L(g)|:g\in C_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m),\ |g|\leqslant|f|\}=\lambda(|f|)=\int_{\mathbb{R}^n}|f|\,\mathrm{d}\mu$$

因此可以拓广 λ_e 到关于 $L^1(\mathbb{R}^n;\mu)$ 的有界线性泛函．因此存在 $\sigma\in L^\infty(\mu)$，使得对于任意的 $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$，有 $\lambda_e(f)=\int_{\mathbb{R}^n}f\sigma_e\mathrm{d}\mu$ 成立．令 $e_1,\cdots,e_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的标准正交基，定义 $\sigma=\sum_{j=1}^m\sigma_{e_j}e_j$，则如果 $f\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$，可得

$$L(f)=\sum_{j=1}^m L((f\cdot e_j)e_j)=\sum_{j=1}^m\int(f\cdot e_j)\sigma_{e_j}\mathrm{d}\mu=\int f\cdot\sigma\mathrm{d}\mu$$

接下来，证明对于 μ-几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，$|\sigma|=1$．令 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 是一个开集，并且 $\mu(U)<\infty$．根据

定义

$$\mu(U)=\sup\left\{\int f\cdot\sigma\mathrm{d}\mu:f\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m),\ |f|\leqslant 1,\ \mathrm{spt}(f)\subset U\right\} \tag{3}$$

现在取 $f_k\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$，使得 $|f_k|\leqslant 1$，$\mathrm{spt}(f_k)\subseteq U$，并且 $f_k\cdot\sigma\to|\sigma|$. 因此

$$\int_U|\sigma|\mathrm{d}\mu=\lim_{k\to\infty}\int f_k\cdot\sigma\mathrm{d}\mu\leqslant\mu(U)$$

另一方面，如果 $f\in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$，并且 $\mathrm{spt}(f)\subset U$，那么

$$\int f\cdot\sigma\mathrm{d}\mu\leqslant\int_U|\sigma|\mathrm{d}\mu$$

对应的(3)式表明 $\mu(U)\leqslant\int_U|\sigma|\mathrm{d}\mu$. 因此对于所有的开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，有 $\mu(U)=\int_U|\sigma|\mathrm{d}\mu$ 成立，因此对于 μ-几乎所有的 $x\in\mathbb{R}^n$，$|\sigma|=1$.

参考文献：

[1] 吉田耕作. 泛函分析[M]. 吴元恺，孙顺华，唐志远，等，译. 北京：人民教育出版社，1980.

[2] 王永革，腾岩梅，贾超华，等. 应用泛函分析[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2012.

[3] 孙永生，王昆扬. 泛函分析讲义[M]. 2版. 北京：北京师范大学出版社，2007.

[4] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义(上册)[M]. 北京：北京大学出版社，2000.

[5] 江泽坚，孙善利. 泛函分析[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2005.

[6] REED M，SIMON B. Methods of Modern Mathematical Physics，Ⅱ：Functional Analysis Self-Adjointness[M]. New York：Academic Press，1972.

[7] LAX P D. Functional Analysis[M]. New York：Johun Wiley and Sons，2002.

[8] BREZIS H. Functional Analysis，Sobolev Spaces and Partial Differential Equations[M]. New York：Springer，2011.

[9] TAYLOR A E，LAY D C. Introduction to Functional Analysis[M]. New York：Johun Wiley and Sons，1958.

[10] 朱 华，王世莉，姚纯青，等. 常曲率空间中具有平行平均曲率向量的伪脐子流形[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2016，38(10)：74-78.

[11] 朱保成，徐文学. Wills猜想的强化形式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(10)：20-25.

[12] 蔺友江. 凸函数Steiner对称化的一个等价特征[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：122-127.

On Extended Version of Riesz Representation Theorem

LIN You-jiang

School of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China

Abstract：The proof of common Riesz representation theorem is to construct vectors satisfying the expression theorem formula through orthogonal complement vectors in zero space. We will give a generalization of the famous Riesz representation theorem and try to give different proof methods from different angles. We give a direct proof by suing the knowledge of geometric measure theory.

Key words：Riesz representation theorem；linear functional；Hausdorff measure；measure theory

责任编辑 廖 坤