DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.002

局部对称空间中常平均曲率超曲面的拼挤定理[①]

马 蕾, 刘建成

西北师范大学 数学与统计学院,兰州 730070

摘要:主要研究局部对称黎曼空间中具有常平均曲率的完备超曲面的拼挤问题. 运用关于超曲面的全脐张量的 Okumura 型不等式及 Omori-Yau 极值原理,得到了一个关于超曲面的第二基本形式模长平方的拼挤定理.

关 键 词:局部对称;常平均曲率;Okumura 型不等式;全脐

中图分类号:O186.12 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2019)02-0005-05

子流形几何中,当外围流形具有良好对称性时,其极小子流形或具有常平均曲率的子流形的研究已有非常丰富的研究成果[1-6]. 对于外围流形不具有良好对称性的黎曼子流形,记 N^{n+1} 表示局部对称黎曼流形,假定其截面曲率 K_N 满足条件 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$. 文献[7]研究了 N^{n+1} 中完备连通的极小超曲面 M,证明了当 S 满足 $S\leqslant(2\delta-1)n$ 时:$S=0$,此时 M 是全测地的;或者 $S=n$,此时 M 等距于 $S^p\left(\frac{n}{p}\right)\times S^{n-p}\left(\frac{n}{n-p}\right)(p=1,2,\cdots,n-1)$,其中 $S^r(c)$ 表示 r 维欧氏球面.

更一般地,文献[8]研究了 N^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的完备超曲面 M,假定 N^{n+1} 在 M 上任一点 x 处的截面曲率 $K_{(n+1)i(n+1)i}$ 满足 $\sum_i\lambda_iK_{(n+1)i(n+1)i}=nH$,其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 M 在 x 点处的 n 个主曲率,证明了:如果 $S<2\sqrt{n-1}(2\delta-1)$,则 M 是全脐超曲面;如果 $S=2\sqrt{n-1}(2\delta-1)(n\geqslant 3)$,则 M 局部地等距于积空间 $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$,其中 $r^2=\frac{1}{\sqrt{n-1}+1}$,$t^2=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}+1}$. 随后,文献[9]研究了外围空间满足截面曲率 $K_N\geqslant c_1$(c_1 是常数)的局部对称空间中具有常数平均曲率 H 的超曲面,假定 N^{n+1} 的截面曲率满足 $K_{(n+1)i(n+1)i}=c_0$(c_0 是常数),证明了:如果 $S<D(n,H)$,则 M 是全脐的超曲面;如果 $S=D(n,H)$,则 M 与一个具有两个不同主曲率,且其中一个主曲率是单重的超曲面等距,其中

$$D(n,H)=nc+\frac{n^3H^2}{2(n-1)}-\frac{(n-2)nH}{2(n-1)}(n^2H^2+4(n-1)c)^{\frac{1}{2}}\qquad c=2c_1-c_0$$

记 Φ 为超曲面 M 的全脐算子. 本文将应用文献[10]中的 Okumura 型不等式

$$|\operatorname{tr}(\Phi^3)|\leqslant C(n,p)|\Phi|^3 \tag{1}$$

对文献[11]中的定理 1.1 进行改进,其中,整数 p 满足 $1\leqslant p\leqslant\frac{n}{2}$,$C(n,p)=\frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}$ 为常数. 我们有:

定理 1 设 N^{n+1} 是截面曲率 K_N 满足 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$ 的局部对称黎曼流形,M 是 N^{n+1} 中具有常平均曲率 H 的完备超曲面,其全脐算子 Φ 满足(1)式. 假定常数 $B(n,\delta,H,p)\geqslant 0$. 若

---

① 收稿日期:2018-07-26

基金项目:国家自然科学基金项目(11261051,11761061).

作者简介:马 蕾(1994-),女,硕士研究生,主要从事微分几何的研究.

$$A(n,\delta,H,p)-B(n,\delta,H,p)^{\frac{1}{2}}\leqslant S\leqslant A(n,\delta,H,p)+B(n,\delta,H,p)^{\frac{1}{2}}\tag{2}$$

则 $\delta=1$，即 N^{n+1} 是单位球面 $S^{n+1}(1)$，此时(2)式即为 $nH^2\leqslant S\leqslant 2\sqrt{p(n-p)}$. 进一步，有：

(i) 若 $S=nH^2$，此时 M 是全脐超曲面；

(ii) 若 $S=2\sqrt{p(n-p)}>nH^2$，此时 M 是 $S^p(r)\times S^{n-p}(t)$，其中：

$$r^2=\frac{1}{\sqrt{p(n-p)}+1}\qquad t^2=\frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{p(n-p)}+1}$$

常数

$$A(n,\delta,H,p)=\frac{1}{2}((5\delta-3)\sqrt{p(n-p)}+nH^2)$$

$$B(n,\delta,H,p)=\left(\frac{3\delta-1}{2}\sqrt{p(n-p)}-\frac{1}{2}nH^2\right)^2+2(\delta-1)(2\delta-1)p(n-p)$$

当 $p=1$ 时，由文献[11]中经典的Okumura引理可知，(1)式总是成立的，而且常数 $A(n,\delta,H,p)=A(n,\delta,H)$，$B(n,\delta,H,p)=B(n,\delta,H)$. 同时定理1中的积空间 $S^p(r)\times S^{n-p}(t)$ 正是文献[11]中的积空间 $S^1(r)\times S^{n-1}(t)$. 由此可见定理1推广并改进了文献[11]的结果.

当 $\delta=1$ 时，

$$A(n,\delta,H,p)=\sqrt{p(n-p)}+\frac{1}{2}nH^2\qquad B(n,\delta,H,p)=\left(\sqrt{p(n-p)}-\frac{1}{2}nH^2\right)^2$$

根据定理1可以得到如下推论：

推论1 设 M 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中具有常平均曲率 H 的完备超曲面，如果

$$S\leqslant\max\{2\sqrt{p(n-p)},nH^2\}$$

则 M 是下列两种情况之一：

(i) $S=nH^2$，此时 M 是全脐超曲面；

(ii) $S=2\sqrt{p(n-p)}>nH^2$，此时 M 是 $S^p(r)\times S^{n-p}(t)$，其中：

$$r^2=\frac{1}{\sqrt{p(n-p)}+1}\qquad t^2=\frac{\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{p(n-p)}+1}$$

设 N^{n+1} 是满足条件 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$ 的截面曲率 K_N 的 $n+1$ 维局部对称流形，M 是浸入到 N^{n+1} 中的完备超曲面. 在 N^{n+1} 上选择适当的局部标准正交标架场 $\{e_A\}_{A=1}^{n+1}$，使得限制在 M 上时，$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ 为 M 的切标架场. 记 $\{\omega_A\}$，$\{\omega_{AB}\}$ 分别是 $\{e_A\}$ 的对偶形式和联络1-形式，则 N^{n+1} 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\omega_A=-\sum_B\omega_{AB}\wedge\omega_B\qquad \omega_{AB}+\omega_{BA}=0$$

$$\mathrm{d}\omega_{AB}=-\sum_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,D}K_{ABCD}\omega_C\wedge\omega_D$$

其中 K_{ABCD} 为外围空间 N^{n+1} 的曲率张量分量. 由于 N^{n+1} 是局部对称的，故其黎曼曲率张量分量 K_{ABCD} 满足 $K_{ABCD,E}=0$.

限制 N^{n+1} 的所有张量在 M 上，则 $\omega_{n+1}=0$，根据Cartan引理有

$$\omega_{(n+1)i}=\sum_j h_{ij}\omega_j\qquad h_{ij}=h_{ji}\tag{3}$$

从而 M 的结构方程为：

$$\mathrm{d}\omega_i=-\sum_j\omega_{ij}\wedge\omega_j\qquad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0$$

$$\mathrm{d}\omega_{ij}=-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l$$

M 的Gauss方程为

$$R_{ijkl}=K_{ijkl}+h_{ik}h_{jl}-h_{il}h_{jk}\tag{4}$$

记 $h=\sum_{i,j}h_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$ 为 M 的第二基本形式，$H=\frac{1}{n}\sum_i h_{ii}$ 为 M 的平均曲率，$S=\sum_{i,j}h_{ij}^2$ 为 M 的第二基本

形式模长平方. 由(4)式知 M 的 Ricci 曲率分量为

$$R_{ij}=\sum_k K_{ikjk}+nHh_{ij}-\sum_k h_{ik}h_{kj} \tag{5}$$

记 h_{ij} 的一阶和二阶协变导数分量分别为 h_{ijk} 和 h_{ijkl}，则：

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k=\mathrm{d}h_{ij}+\sum_k h_{jk}\omega_{ki}+\sum_k h_{ik}\omega_{kj} \tag{6}$$

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l=\mathrm{d}h_{ijk}+\sum_l h_{ljk}\omega_{li}+\sum_l h_{ilk}\omega_{lj}+\sum_l h_{ijl}\omega_{lk} \tag{7}$$

由(3)式和(6)式，以及(6)式和(7)式，我们分别得到 Codazzi 方程以及 Ricci 恒等式：

$$h_{ijk}-h_{ikj}=-K_{(n+1)ijk} \tag{8}$$

$$h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum_m h_{mi}R_{mjkl}+\sum_m h_{mj}R_{mikl} \tag{9}$$

定义 h_{ij} 的 Laplacian 为 $\Delta h_{ij}=\sum_k h_{ijkk}$，根据(8),(9)式有

$$\Delta h_{ij}=nHK_{(n+1)i(n+1)j}-\sum_k K_{(n+1)k(n+1)k}h_{ij}+nH\sum_k h_{ik}h_{kj}-Sh_{ij}+\sum_{l,k}(K_{lkik}h_{lj}+K_{lkjk}h_{li}+2K_{lijk}h_{lk})+(nH)_{ij} \tag{10}$$

因为 $\Delta S=2\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+2\sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij}$，根据(10)式得到

$$\frac{1}{2}\Delta S=\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+nH\sum_{i,j}h_{ij}K_{(n+1)i(n+1)j}-S\sum_k K_{(n+1)k(n+1)k}-S^2+2\sum_{i,j,k,m}h_{ij}(h_{mk}K_{mijk}+h_{mi}K_{mkjk})+nH\sum_{i,j,k}h_{ij}h_{jk}h_{ki} \tag{11}$$

引理 1[10]　设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 n 个实数，满足 $\sum_i\mu_i=0$，$\sum_i\mu_i^2=\beta^2$，其中 β 是非负常数. 则方程 $\left|\sum_i\mu_i^3\right|=\dfrac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}\beta^3$ 成立当且仅当 p 个非负数 μ_i 和 $n-p$ 个非正数 μ_i 分别相等.

引理 2[12-13]　设 M 是 Ricci 曲率有下界的完备黎曼流形，F 是 M 上有上界的 C^2-函数. 则对任意 $\varepsilon>0$，存在 M 上的一个点列 $\{x_k\}$，使得：

$$\sup F-\varepsilon<F(x_k)\qquad|\nabla F(x_k)|<\varepsilon\qquad\Delta F(x_k)<\varepsilon$$

引理 3[14]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对称的 $n\times n$ 矩阵，$n\geqslant 2$，记 $A_1=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 和 $A_2=\sum_{i,j}a_{ij}^2$. 则有

$$\sum_i(a_{in})^2-A_1a_{nn}\leqslant\frac{1}{n^2}\left(n(n-1)A_2+(n-2)\,|A_1|\,(n-1)(nA_2-A_1^2)^{\frac{1}{2}}-2(n-1)A_1^2\right)$$

定理 1 的证明

选取 M 的一组基，使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$. 结合条件 $\frac{1}{2}<\delta\leqslant K_N\leqslant 1$，有：

$$\begin{aligned}&nH\sum_i\lambda_iK_{(n+1)i(n+1)i}-S\sum_k K_{(n+1)k(n+1)k}=\\&\sum_{i,j}\lambda_j\lambda_iK_{(n+1)i(n+1)i}-\sum_{i,j}\lambda_j^2K_{(n+1)i(n+1)i}=\\&-\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_j-\lambda_i)^2K_{(n+1)i(n+1)i}+\frac{n}{2}\sum_i\lambda_i^2K_{(n+1)i(n+1)i}-\frac{1}{2}\sum_{i,j}\lambda_j^2K_{(n+1)i(n+1)i}=\\&n^2H^2+\frac{\delta-3}{2}nS\end{aligned} \tag{12}$$

$$\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2K_{ijij}\geqslant\delta\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2=2n\delta(S-nH^2) \tag{13}$$

将(12),(13)式代入(11)式得到

$$\frac{1}{2}\Delta S\geqslant nH\sum_i\lambda_iK_{(n+1)i(n+1)i}-S\sum_i K_{(n+1)i(n+1)i}-S^2+\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2K_{ijij}+nH\sum_i\lambda_i^3 \tag{14}$$

记二阶对称张量 $\Phi=\sum_{i,j=1}^n\Phi_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$，其分量 $\Phi_{ij}=h_{ij}-H\delta_{ij}$. 由于 $\sum_i(H-\lambda_i)=0$，$\sum_i(H-\lambda_i)^2=$

$S-nH^2=|\Phi|^2$，根据引理1有

$$\sum_i(H-\lambda_i)^3=\frac{n-2p}{\sqrt{np(n-p)}}|\Phi|^3$$

从而

$$nH\sum_i\lambda_i^3=3nH^2S-2n^2H^4-nH\sum_i(H-\lambda_i)^3\geqslant$$
$$3nH^2S-2n^2H^4-\frac{1}{2}\left(\varepsilon nH^2+\frac{(n-2p)^2}{\varepsilon p(n-p)}|\Phi|^2\right)|\Phi|^2$$

其中 $\varepsilon>0$ 是任意常数. 现在取 $\varepsilon=\frac{n+2\sqrt{p(n-p)}}{\sqrt{p(n-p)}}$，则有

$$nH\sum_i\lambda_i^3\geqslant\frac{n}{2\sqrt{p(n-p)}}nH^2S-\left(\frac{n}{2\sqrt{p(n-p)}}-1\right)S^2\tag{15}$$

将(12)，(13)和(15)式代入(14)式中，得到

$$\frac{1}{2}\Delta S\geqslant-\frac{n}{2\sqrt{p(n-p)}}S^2+n\left(\frac{5\delta-3}{2}+\frac{nH^2}{2\sqrt{p(n-p)}}\right)S-n^2H^2(2\delta-1)\tag{16}$$

记：

$$A(n,\delta,H,p)=\frac{1}{2}((5\delta-3)\sqrt{p(n-p)}+nH^2)$$

$$B(n,\delta,H,p)=\left(\frac{3\delta-1}{2}\sqrt{n(n-p)}-\frac{1}{2}nH^2\right)^2+2(\delta-1)(2\delta-1)p(n-p)$$

再根据定理1的条件，有

$$\frac{1}{2}\Delta S\geqslant(A+B^{\frac{1}{2}}-S)(S-A+B^{\frac{1}{2}})\geqslant0\tag{17}$$

令 $F=(S+b)^{\frac{1}{2}}$，其中 $b>0$. 由 $S<A+B^{\frac{1}{2}}$ 知 F 是光滑且有上界的. 在(5)式中应用引理3，可得

$$R_{ii}\geqslant(n-1)\delta-\frac{n-1}{n}S-\frac{n-2}{n}H\sqrt{n(n-1)(S-nH^2)}+2(n-1)H^2$$

这意味着 M 的 Ricci 曲率有下界. 根据引理2，对于任意 $\varepsilon>0$，在 M 上总存在一个点列 $\{x_k\}$，使得

$$\frac{1}{2}\Delta S=F(x_k)\Delta F(x_k)+|\nabla F^2|(x_k)<\varepsilon^2+F(x_k)\varepsilon\tag{18}$$

由于 F 有界，当 ε 趋于0时，(18)式右边也趋于0，即 $F(x_k)$ 收敛，不妨记收敛极限为 F_0. 根据上确界的定义可知 $F_0=\sup F$，再根据 F 的定义可知 $S(x_k)\to S_0=\sup S$. 由(17)式和(18)式可得

$$\varepsilon(F(x_k)+\varepsilon)>\frac{1}{2}\Delta S(x_k)\geqslant(A+B^{\frac{1}{2}}-S(x_k))(S(x_k)-A+B^{\frac{1}{2}})$$

令 k 趋于 ∞，有

$$(A+B^{\frac{1}{2}}-S_0)(S_0-A+B^{\frac{1}{2}})\leqslant\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2}\Delta S(x_k)\leqslant0\tag{19}$$

由(17)式和(19)式知 $S_0=A-B^{\frac{1}{2}}$ 或 $S_0=A+B^{\frac{1}{2}}$. 结合(16)式可知

$$h_{ijk}=0\qquad\sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij}=0$$

因此(12)，(13)式和(15)式中的不等式等号成立. 由(12)式知 $\delta=1$. 因此 N^{n+1} 是单位球面 $S^{n+1}(1)$，同时：

$$A=\sqrt{p(n-p)}+\frac{1}{2}nH^2\qquad B=\left(\sqrt{p(n-p)}-\frac{1}{2}nH^2\right)^2$$

下面分两种情况讨论：

当 $S_0=A-B^{\frac{1}{2}}$ 时，因为 $S\geqslant A-B^{\frac{1}{2}}$ 且 $S_0=\sup S$，从而 S 是一个常数，即

$$S=A-B^{\frac{1}{2}}=nH^2\leqslant2\sqrt{p(n-p)}$$

因此 M 是一个全脐超曲面.

当 $S_0=A+B^{\frac{1}{2}}$ 时，

$$S_0 = A + B^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p(n-p)} + \frac{1}{2}nH^2 + \left| \sqrt{p(n-p)} - \frac{1}{2}nH^2 \right| = \max\{2\sqrt{p(n-p)}, nH^2\}$$

如果 $nH^2 > 2\sqrt{p(n-p)}$，$S_0 = nH^2$，则 $S = nH^2$，M 是一个全脐超曲面.

如果 $nH^2 \leqslant 2\sqrt{p(n-p)}$，$S_0 = 2\sqrt{p(n-p)}$，则 $S \leqslant 2\sqrt{p(n-p)}$，与文献[8]中推论 1.1 的证明方法相似，将其中的 $C(n, 1)$ 用 $C(n, p)$ 代替即可知定理 1 成立.

参考文献：

[1] CHERN S S, DO CARMO M, KOBAYASHI S. Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length [M]. New York: Springer-Verlag, 1970: 59－75.

[2] LI H Z. A Characterization of Clifford Minimal Hypersurfaces in S^4 [J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123(10): 3183－3187.

[3] CHENG Q M, ISHIKAWA S. A Characterization of the Clifford Torus [J]. Proc Amer Math Soc, 1999, 127(3): 819－828.

[4] ALENCAR H, CARMO M. Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres [J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120(4): 1223－1229.

[5] 何盼盼，姚纯青. 球面上具有平行平均曲率向量的子流形 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：72－75.

[6] 胡有婧，王　伟，杨　莉. de Sitter 空间中的紧致类空子流形 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：33－36.

[7] 水乃翔，吴国强. 局部对称黎曼流形中的极小超曲面 [J]. 数学年刊(A 辑)，1995，16(6)：687－691.

[8] 舒世昌，刘三阳. 局部对称流形的具常平均曲率的完备超曲面 [J]. 数学年刊(A 辑)，2004，25(1)：99－104.

[9] 张士诚，吴报强. 局部对称黎曼流形中具有常中曲率完备超曲面 [J]. 数学物理学报(A 辑)，2010，30(4)：1000－1005.

[10] MELÉNDEZ J. Rigidity Theorems for Hypersurfaces with Constant Mean Curvature [J]. Bull Braz Math Soc(N. S.), 2014, 45(3): 385－404.

[11] 张剑锋，洪涛清. 局部对称流形中具有常平均曲率的完备超曲面 [J]. 纯粹数学与应用数学，2013，29(2)：118－124.

[12] OMORI H. Isometric Immersions of Riemannian Manifolds [J]. J Math Soc Japan, 1967, 19(2): 205－214.

[13] YAU S T. Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds [J]. Comm Pure and Appl Math, 2010, 28(2): 201－228.

[14] 蔡开仁. 欧氏空间中闭子流形的拓扑 [J]. 数学年刊(A 辑)，1987，8(2)：234－241.

On Pinching Theorem of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Locally Symmetric Spaces

MA　Lei,　LIU Jian-cheng

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, the complete hypersurfaces with constant mean curvature in locally symmetric-space have been discussed. By Okumura-type inequality of total umbilicity tensor and Omori-Yau maximum principle, a pinching theorem for the squared length of the second fundamental form has been obtained.

Key words: locally symmetric; constant mean curvature; Okumura-type inequality; totally umbilical

责任编辑　廖　坤　崔玉洁