第 44 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 2 月
Vol. 44 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2019

DOI: 10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.003

Paneitz 算子的第二不变量与相关椭圆方程的变号解[①]

张先锋， 姚纯青

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 研究了在维数 $n \geqslant 5$ 的紧致的爱因斯坦流形 (M, g) 中 Paneitz 算子的第二不变量 $\mu_2(M, g)$. 将光滑度量推广为广义度量后，得到了 Paneitz 算子的第二不变量 $\mu_2(M, g)$ 的可达性条件和相关椭圆方程变号解的存在性的一种新证明方法.

关 键 词： Paneitz 算子；第二不变量；共形不变量；强收敛；变号解

中图分类号：O186.1 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000-5471(2019)02-0010-04

文献[1] 在 4 维黎曼流形中引入了一个具有共形不变性的四阶微分算子，文献[2] 将维数扩大到 5 以上. Paneitz 算子可定义为

$$P_g(u) = \Delta^2 u - \operatorname{div}\left(\frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} S_g - \frac{4}{(n-2)} \mathrm{Ric}_g\right) \mathrm{d}u + \frac{n-4}{2} Q_g u$$

其中

$$Q_g = \frac{1}{2(n-1)} \Delta S_g + \frac{n^3-4n^2+16(n-1)}{8(n-1)^2(n-2)^2} S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} |\mathrm{Ric}_g|^2$$

在本文中，约定 $\Delta = -\operatorname{div}\nabla$.

当 (M, g) 是爱因斯坦流形时，

$$P_g(u) = \Delta_g^2 u + a_n S_g \Delta_g u + b_n S_g^2 u \tag{1}$$

其中 $a_n = \dfrac{n^2-2n-4}{2n(n-1)}$，$b_n = \dfrac{(n-4)(n^2-4)}{16n(n-1)^2}$. P_g 是一个具有自伴性的椭圆算子，具有离散谱

$$\operatorname{spec}(P_g) = \{\lambda_{1,g}, \lambda_{2,g}, \cdots\}$$

其中的特征值有如下关系：

$$\lambda_{1,g} < \lambda_{2,g} \leqslant \lambda_{3,g} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{k,g} \cdots \to +\infty \tag{2}$$

文献[3] 给出了 $\lambda_{k,g}$ 的变分表达式、Paneitz 算子的 k 阶不变量和 Paneitz 算子的不变量的定义.

$\lambda_{k,g}$ 的变分表达式为

$$\lambda_{k,g} = \inf_{V \in Gr_k(H_2^2(M))} \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{\int_M v P_g v \, \mathrm{d}v_g}{\int_M v^2 \, \mathrm{d}v_g}$$

其中，$k \in \mathbb{N}_+$，$Gr_k(H_2^2(M))$ 表示 $H_2^2(M)$ 中的所有 k 维子空间的集合.

---

① 收稿日期：2018-05-01

基金项目：国家自然科学基金项目(11471188).

作者简介：张先锋(1992-)，男，硕士研究生，主要从事微分几何的研究.

通信作者：姚纯青，副教授.

Paneitz 算子的 k 阶不变量定义为

$$\mu_k(M,\ g) = \inf_{\tilde{g}\in[g]} \lambda_{k,\tilde{g}}[\mathrm{vol}(M,\ \tilde{g})]^{\frac{4}{n}}$$

其中 $\mathrm{vol}(M,\ \tilde{g})$ 是关于度量 $\tilde{g}$ 的流形 M 的黎曼体积，$[g] = \{\tilde{g} = \varphi^{\frac{N-2}{2}} g\colon \varphi \in C^{\infty}(M),\ \varphi > 0\}$ 是度量 g 的共形类，$N = \dfrac{2n}{n-4}$.

Paneitz 算子的不变量定义为

$$\mu(M,\ g) = \inf_{V\in(H_2^2(M))-\{0\}} \frac{\int_M vP_g v\,\mathrm{d}v_g}{\left(\int_M |v|^N \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{2}{N}}}$$

文献[3]表明，Paneitz算子的不变量 $\mu(M,\ g)$ 以及 $\mu_1(M,\ g)$ 能在光滑度量下达到. 但是文献[4]指出，Paneitz 算子的第二不变量 $\mu_2(M,\ g)$ 不能在与 g 共形的光滑度量下达到. 受文献[5]的启发，为了能让 $\mu_2(M,\ g)$ 达到，文献[4]将与 g 共形的光滑度量推广到与 g 共形的广义度量.

设 $\tilde{g} = u^{\frac{N-2}{2}} g$ 是与 g 共形的广义度量，其中 $u \in L^N(M)$，$u \geqslant 0$，且 $u \not\equiv 0$. 对于广义共形度量 $\tilde{g}$，Paneitz 算子 P_g 的 k 阶特征值定义为

$$\lambda_{k,\tilde{g}} = \inf_{V\in Gr_k^u(H_2^2(M))} \sup_{v\in V-\{0\}} \frac{\int_M vP_g v\,\mathrm{d}v_g}{\int_M u^{N-2} v^2\,\mathrm{d}v_g}$$

其中，$k \in \mathbb{N}_+$，$Gr_k^u(H_2^2(M))$ 表示 $H_2^2(M)$ 中的所有 k 维子空间的集合.

假设维数 $n \geqslant 5$ 的紧致爱因斯坦流形 $(M,\ g)$ 的数量曲率为正，$\mu_2(M,\ g) \neq 0$ 并且可以在广义度量下达到，则 $u = |w|$，且方程 $P_g w = \mu_2(M,\ g)|w|^{N-2} w$ 有变号解.

文献[3]得到：只需 $\mu(M,\ g) < 0$，则 $\mu_2(M,\ g)$ 就能在广义度量下达到；进一步，如果 $\mu_2(M,\ g) \leqslant 0$，则 w 是上述方程的变号解，并且 $u = |w|$.

近年来，Paneitz 算子的研究受到广泛重视，特别是 Paneitz 算子的特征值和不变量的相关知识越来越多地被人们知晓(参见文献[3－7]).

针对 Paneitz 算子的第二不变量 $\mu_2(M,\ g)$ 的可达性和相关椭圆方程的变号解，文献[3－4]给出了不同的条件，但得到了相似的结论. 在本文中，我们给出了不同于文献[3－4]的条件和证明过程，也得到了相类似的结果. 本文的主要结果是：

定理 1　设 $(M,\ g)$ 是维数 $n \geqslant 5$ 的紧致的爱因斯坦流形，如果 $\lambda_1 < 0$ 且 $0 \notin Sp(P_E)$，则 $\mu_2(M,\ g)$ 可以在与 g 共形的广义度量上达到，即存在 $u \in L^N(M)$，$u \geqslant 0$，$u \not\equiv 0$ 和 $w \in H_2^2(M)$，使得 $P_g w = \mu_2(M,\ g)u^{N-2} w$ 成立. 此时，在分布的意义下，方程

$$P_g w = \mu_2(M,\ g)u^{N-2} w \tag{3}$$

有解. 若 $\mu_2(M,\ g) \leqslant 0$. 那么上述函数 w 变号.

证　设 $\{u_m\}$ 是 $\mu_2(M,\ g)$ 的极小化序列，即

$$\mu_2(M,\ g) = \lim_m \lambda_{2,\tilde{g}_m} \left(\int_M u_m^N \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

设序列 $\{u_m\}$，使得 $\int_M u_m^N \mathrm{d}v_g = 1$，此时 $\mu_2(M,\ g) = \lim\limits_m \lambda_{2,\tilde{g}_m}$. 对每个 u_m，由文献[3]的性质3我们可以得到，存在 $w_m \in H_2^2(M)$，使得

$$P_g w_m = \lambda_{2,\tilde{g}_m} u_m^{N-2} w_m \tag{4}$$

而且序列 $\{w_m\}$ 满足 $\int_M u_m^{N-2} w_m{}^2\,\mathrm{d}v_g = 1$. 因为 $\int_M u_m^N \mathrm{d}v_g = 1$，则 $\{u_m\}$ 在 $L^N(M)$ 中有界，且 $L^N(M)$ 是一个有自反性的空间. 所以存在 $u \in L^N(M)$，使得在 $L^N(M)$ 中 $u_m \rightharpoonup u$. 下证 $\{w_m\}$ 在 $H_2^2(M)$ 中有界. 假设 $\|w_m\|_{H_2^2(M)} \to \infty$. 令 $w'_m = \dfrac{w_m}{\|w_m\|_{H_2^2(M)}}$，因此 $\|w'_m\|_{H_2^2(M)} = 1$，因此 $\{w'_m\}$ 在 $H_2^2(M)$ 中有界. 因为

$H_2^2(M)$ 是一个有自反性的空间，所以存在$w' \in H_2^2(M)$，使得：

(i) 在 $H_2^2(M)$ 中 $w'_m \rightharpoonup w'$；

(ii) 在 $H_1^2(M)$ 和 $L^2(M)$ 中 $w'_m \to w'$.

由(4) 式，w'_m 满足 $P_g w'_m = \lambda_{2,\tilde{g}_m} u_m^{N-2} w'_m$，因此对任意的 $\varphi \in C^\infty(M)$，w'_m 满足

$$\int_M (\Delta w'_m \Delta\varphi + a_n S_g \nabla w'_m \nabla\varphi + b_n S_g^2 w'_m \varphi) \mathrm{d}v_g = \lambda_2(u_m)\int_M u_m^{N-2} w'_m \varphi \mathrm{d}v_g$$

根据 Hölder 不等式，有

$$\int_M u_m^{N-2} w'_m \varphi \mathrm{d}v_g \leqslant \|\varphi\|_\infty \frac{\left(\int_M u_m^{N-2} w_m^2 \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{2}}}{\|w_m\|}\left(\int_M u_m^{N-2}\mathrm{d}v_g\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

则

$$\int_M (\Delta w'_m \Delta\varphi + a_n S_g \nabla w'_m \nabla\varphi + b_n S_g^2 w'_m \varphi) \mathrm{d}v_g = \circ(1)$$

即 $P_g w' = 0$. 因为 $0 \notin Sp(P_E)$，根据(2) 式，则 $w' = 0$.

另一方面，有

$$\int_M ((\Delta w'_m)^2 + a_n S_g |\nabla w'_m|^2 + b_n S_g^2 w_m'^2) \mathrm{d}v_g = \lambda_{2,\tilde{g}_m}\int_M u_m^{N-2} w_m'^2 \mathrm{d}v_g$$

而

$$\lambda_{2,\tilde{g}_m}\int_M u_m^{N-2} w_m'^2 \mathrm{d}v_g = \frac{\lambda_{2,\tilde{g}_m}}{\|w_m\|^2} \to 0$$

再由(ii)，我们得到$\int_M b_n S_g^2 w_m'^2 \mathrm{d}v_g \to 0$，$\int_M a_n S_g |\nabla w_m'|^2 \mathrm{d}v_g \to 0$. 所以$\int_M (\Delta w'_m)^2 \mathrm{d}v_g \to 0$.

综上所述，我们得到

$$1 = \|w'_m\|^2_{H_2^2(M)} = \int_M ((\Delta w'_m)^2 + |\nabla w'_m|^2 + (w'_m)^2) \mathrm{d}v_g \to 0$$

于是得出了矛盾. 所以$\{w_m\}$ 在 $H_2^2(M)$ 中有界，于是存在 $w \in H_2^2(M)$，使得：

(i)′ 在 $H_2^2(M)$ 中 $w_m \rightharpoonup w$；

(ii)′ 在 $H_1^2(M)$ 和 $L^2(M)$ 中 $w_m \to w$.

在分布意义下，有 $P_g w = \mu_2(M, g) u^{N-2} w$. 下证 w 是变号函数，且 $w \not\equiv 0$.

假设 w 不是变号函数，不失一般性，设 $w \geqslant 0$，则在分布意义下，有

$$\int_M \Delta(\Delta_g w) \mathrm{d}v_g + \int_M a_n S_g \Delta_g w \mathrm{d}v_g + \int_M b_n S_g^2 w \mathrm{d}v_g = \int_M \mu_2(M, g) u^{N-2} w \mathrm{d}v_g$$

等号左边第一式和第二式都为 0，则

$$\int_M b_n S_g^2 w \mathrm{d}v_g = \int_M \mu_2(M, g) u^{N-2} w \mathrm{d}v_g$$

等号左边非负，右边为负. 这就得到了矛盾，除非 $w \equiv 0$. 下面的证明过程说明这是不可能的.

假设 $w \equiv 0$. 由文献[8] 的定理 1 我们可以得到

$$\int_M ((\Delta_g w_m)^2 + a_n S_g |\nabla_g w_m|^2 + b_n S_g^2 w_m^2) \mathrm{d}v_g = \lambda_{2,\tilde{g}_m}\int_M u_m^{N-2} w_m^2 \mathrm{d}v_g \leqslant$$

$$[\mu_2(M, g) + \circ(1)]\left[(K_2^2 + \varepsilon)\int_M ((\Delta_g w_m)^2 + A(\varepsilon) w_m^2) \mathrm{d}v_g\right]$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，$A(\varepsilon)$ 表示与 ε 有关的常数，且

$$K_2^{-2} = \pi^2 n(n-1)(n^2-4)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}[\mu_2(M, g) + \circ(1)][(K_2^2 + \varepsilon)\int_M ((\Delta_g w_m)^2 + A(\varepsilon) w_m^2) \mathrm{d}v_g]$$

所以

$$[1 - (\mu_2(M, g) + \circ(1))(K_2^2 + \varepsilon)]\int_M (\Delta_g w_m)^2 \mathrm{d}v_g \leqslant \circ(1)$$

如果 $\mu_2(M, g) \leqslant 0$，得

$$\| \Delta_g w_m \|_2^2 = \int_M (\Delta_g w_m)^2 \mathrm{d}v_g \to 0$$

由 $\| u \|_{H_2^2(M)} = (\| \Delta_g u \|_2^2 + \| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_2^2)^{\frac{1}{2}}$，得到 $\| w_m \|_{H_2^2(M)} \to 0$. 从而

$$1 = \int_M u_m^{N-2} w_m^2 \mathrm{d}v_g \leqslant \left(\int_M u_m^N \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_M w_m^N \mathrm{d}v_g\right)^{\frac{2}{N}} \tag{5}$$

(5) 式右边第二式趋于 0. 这样就得出了矛盾. 所以 $w \not\equiv 0$.

参考文献：

[1] PANEITZ S M. A Quartic Conformally Covariant Differential Operator for Arbitrary Pseudo-Riemannian Manifolds (Summary) [J]. Symmetry Integrability and Geometry Methods and Applications, 2008, 36(4): 36-38.

[2] BRANSON T P. Group Representations Arising from Lorentz Conformal Geometry [J]. Journal of Functional Analysis, 1987, 74(2): 199-291.

[3] BENALILI M, BOUGHAZI H. Some Properties of the Paneitz Operator and Nodal Solutions to Elliptic Equations [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2016, 61(7): 984-1001.

[4] BENALILI M, BOUGHAZI H. On the Second Paneitz-Branson Invariant [J]. Houston Journal of Mathematics, 2007, 36(2): 393-420.

[5] AMMANN B, HUMBERT E. The Second Yamabe Invariant [J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 235(2): 377-412.

[6] HEBEY E, ROBERT F. Coercivity and Struwe's Compactness for Paneitz Type Operators with Constant Coefficients [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2001, 13(4): 491-517.

[7] DJADLI Z, HEBEY E, LEDOUX M. Paneitz-Type Operators and Applications [J]. Duke Mathematical Journal, 2000, 104(1): 129-169.

[8] CARAFFA D. Equations Elliptiques du Quatrieme Ordre Avec Exposants Critiques Sur Les Variétés Riemanniennes Compactes [J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2001, 80(9): 941-960.

On the Second Paneitz Invariant and Nodal Solution of Related Elliptic Equation

ZHANG Xian-feng,　YAO Chun-qing

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the second Paneitz invariant $\mu_2(M, g)$ of the smooth compact Einstein manifold (M, g) of dimension $n \geqslant 5$ has been researched, and enlarge the conformal class to what we call the class of generalized metrics conformal to g, then under strong conditions, we obtain a new way to give an attainability condition of the second invariant $\mu_2(M, g)$ of Paneitz operator and the existence of nodal solution for the related elliptic equation have been given.

Key words: Paneitz operator; the second invariant; conformal invariant; converge strongly; nodal solution

责任编辑　廖　坤