第 44 卷　第 2 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2019 年 2 月
Vol. 44　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.004

具有特殊循环子群个数的有限群[①]

姜富铭，　周　伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 设 G 为有限群，$C(G)$为 G 的循环子群的集合. $|C(G)|$对 G 的结构有一定的影响. 例如，G 为初等交换 2-群当且仅当$|C(G)|=|G|$. 一些作者已经分类了满足$|G|-|C(G)|\leqslant 3$ 的群. 利用循环子群个数与$|G|$的等式关系，分类了所有满足$|G|-|C(G)|=4$ 的有限群.

关　键　词： 有限群；2-群；循环子群

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2019)02-0014-04

文中的群均为有限群. 许多群论学者研究了循环子群对有限群结构的影响，并得出了一些有趣的结果. 文献[1]研究了循环子群次数对有限群的影响. 文献[2]研究了非循环子群个数与群的可解性. 文献[3]得到了一个循环子群个数的下界. 也有学者研究更一般的交换子群对群结构的影响(参见文献[4-9]).

本文主要研究循环子群个数对群结构的影响.

设G为有限群，$C(G)$为G的循环子群的集合. 文献[10]分类了满足$|C(G)|=|G|-1$或者$|C(G)|=|G|-2$ 的群 G. 文献[11]分类了满足$|C(G)|=|G|-3$ 的群 G. 本文将分类满足$|C(G)|=|G|-4$ 的群 G.

定理 1　G 为有限群，$|C(G)|=|G|-4$ 当且仅当 G 同构于下列群之一：

$C_2\times C_2\times C_3$，$C_2\times C_2\times S_3$，$\langle a^2=b^3=c^3=1 \mid b^a=b^{-1}, c^a=c^{-1}, [b,c]=1\rangle$，$A_4$，

C_8，D_{16}，$C_2\times C_2\times C_4$，$\langle a,b,c \mid a^4=b^2=c^2=1, [b,c]=a^2, [a,c]=[a,b]=1\rangle$，

$\langle a,b,c \mid a^4=b^2=c^2=1, [a,c]=b, [a,b]=[b,c]=1\rangle$，$D_8\times C_2\times C_2$，$C_3\times C_3$.

我们将$|G|$的素因子集合记为$\pi(G)$，G 中元素阶的集合记为$\pi_e(G)$，G 中 k 阶循环子群的个数记为$n_k(G)$(简记为 n_k). 记 P_s 为 G 中的 Sylow s-子群.

引理 1[11]　设 G 为群且$|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$，其中 p_i 为素数且 $p_1<p_2<\cdots<p_r$. 如果 $r\geqslant 3$，则$|G|-|C(G)|>p_r$.

引理 2[11]　设 G 为群且$|G|=p^\alpha q^\beta$，其中 p,q 为素数且 $p<q$. 若 $G\not\cong D_{2q},C_6,D_{12},S_3$，则$|G|-|C(G)|>q$.

考虑群 G 中元素的分布情况，设 ϕ 为欧拉函数，有等式：

$$|G|=\sum_{k\in\pi_e(G)}n_k\phi(k)\qquad |C(G)|=\sum_{k\in\pi_e(G)}n_k$$

于是有以下命题：

命题 1　设 G 为群，则$|G|-|C(G)|=\sum_{k\in\pi_e(G)}n_k(\phi(k)-1)$，其中 ϕ 为欧拉函数.

---

① 收稿日期：2018-05-23
基金项目：国家自然科学基金项目(11671324).
作者简介：姜富铭(1995-)，男，硕士研究生，主要从事有限群论的研究.
通信作者：周　伟，副教授.

根据命题 1，$|C(G)|=|G|-4$ 等价于

$$\sum_{k\in\pi_e(G)} n_k(\phi(k)-1)=4 \tag{1}$$

引理 3　设 G 为群，若 $|C(G)|=|G|-4$，则 G 为 2-群、3-群或者$\{2,3\}$-群.

证　由引理 1，$|\pi(G)|\leqslant 2$. 当 $|G|=p^\alpha$(p 为素数)时，由(1)式，$p\leqslant 3$. 当 $|G|=p^\alpha q^\beta$(p,q 为素数)时，可以验证 $G\ncong D_{2q},C_6,D_{12},S_3$ 时，不满足条件，于是由引理 2，G 为$\{2,3\}$-群.

引理 4　G 为群且 $|G|=2^\alpha 3^\beta(\alpha,\beta\neq 0)$. 若 $|C(G)|=|G|-4$，则 G 同构于下列群之一：

$C_2\times C_2\times C_3$，$C_2\times C_2\times S_3$，$\langle a^2=b^3=c^3=1\mid b^a=b^{-1},c^a=c^{-1},[b,c]=1\rangle$，$A_4$.

证　(i) $\pi_e(G)\subseteq\{1,2,3,4,6\}$，特别地，$n_3+n_4+n_6=4$.

因为 $\phi(9)=6$，$\phi(16)=8$，所以 $\pi_e(G)\subseteq\{1,2,3,4,6,8,12\}$. 当 $n_8\geqslant 1$ 或者 $n_{12}\geqslant 1$ 时，均有 $n_4\geqslant 1$. 而 $\phi(12)=\phi(8)=4$，由(1)式得 $n_3=0$，与 $\beta\neq 0$ 矛盾. 因此 $\pi_e(G)\subseteq\{1,2,3,4,6\}$.

(ii) 当 $n_6\geqslant 1$ 时，$n_3\geqslant 1$，$n_4=0$ 且 $\beta=1$.

因为 $\beta\neq 0$，故 $n_3\geqslant 1$. 若 $n_6\geqslant 1$，由(1)式，$n_3,n_6\leqslant 3$，$n_4\leqslant 2$. 因为 $n_9=0$，$n_3(C_3\times C_3)=4$，所以 $\beta=1$. 若 $n_6=3$，则 $n_4=0$. 若 $n_6=2$，$n_3=2$，则 $n_4=0$. 若 $n_6=2$，$n_3=n_4=1$，则有 $12\in\pi_e(G)$，矛盾. 若 $n_6=1$，$n_4=2$，则 $n_3=1$. 设 X 为 G 中唯一的 3 阶子群. 若 $\alpha\geqslant 3$，因为

$$G/C_G(X)\lesssim \mathrm{Aut}(X)\cong C_2 \qquad n_{12}=0$$

所以

$$C_G(X)\geqslant L_1\cong C_2\times C_2\times C_3$$

而 $n_6(L_1)=3$，矛盾. 于是 $|G|\leqslant 12$，容易验证无满足条件的群 G. 若 $n_6=1$，$n_4=1$，则 $n_3=2$. 对任意的 3 阶子群 X，因为 $\beta=1$，所以 $X\ \mathrm{char}\ N_G(X)\lhd G$. 因此 $12\in\pi_e(G)$，矛盾. 故 $n_6\geqslant 1$ 时，$n_4=0$. 下面分类讨论.

1) $n_6\geqslant 1$. 此时 $n_3\leqslant 3$，若 $n_3=2$ 或者 $n_3=3$，因为 $\beta=1$，由 Sylow 定理知 $n_3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$，矛盾. 于是 $n_6=3$，$n_3=1$. 因此存在 3 阶正规子群 X，X 为 Sylow 子群. 因为 $n_4=0$，所以 G 的 Sylow 2-子群为初等交换群. 若 $\alpha\geqslant 4$，则

$$C_G(X)\geqslant L_2\cong C_2\times C_2\times C_2\times C_3$$

而 $n_6(L_2)>4$，矛盾. 因 $|G|\neq 6$，故 $12\leqslant|G|\leqslant 24$. 若 $|G|=24$，则

$$C_G(X)\geqslant L_3\cong C_2\times C_2\times C_3$$

因为 $n_6=3=n_6(L_3)$，所以

$$G=C_2\ltimes L_3\cong\langle a_1^2=a_2^2=a_3^2=b^3=1\mid[a_i,a_j]=[a_2,b]=[a_3,b]=1,b^{a_1}=b^{-1}\rangle$$

即 $G\cong C_2\times C_2\times S_3$. 若 $|G|=12$，因为 $n_6=3$，$n_4=0$，所以 $G=L_3\cong C_2\times C_2\times C_3$.

2) $n_6=0$. 由(1)式，$n_3+n_4=4$. 由 $\beta\neq 0$，有 $1\leqslant n_3\leqslant 4$. 若 $n_3=2,3$，因为 $n_9=0$，$n_3(C_3\times C_3)=4$，所以 $\beta=1$，与 Sylow 定理矛盾. 若 $n_3=1$，则 $n_4=3$. 于是存在 3 阶正规子群 $X=\langle x\rangle$. 令 a 为 G 中的 4 阶元. 因为 $n_{12}=0$，所以 $x^a=x^{-1}$. 因此 $|xa^2|=6$，矛盾于 $n_6=0$. 因此 $n_3=4$，$n_4=0$.

若 $P_3\lhd G$，因 $n_9=0$，则 $P_3=C_3\times C_3$. 设$\langle b\rangle$为不正规的 3 阶子群，则存在 2 阶元 a，使得 $b^a=c\in G\backslash\langle b\rangle$，而 $|ab|=6$，矛盾. 故 3 阶子群均正规. 因此 G 中任意的 18 阶子群满足

$$H\cong\langle a^2=b^3=c^3=1\mid b^a=b^{-1},c^a=c^{-1},[b,c]=1\rangle$$

若 $G>H$，则存在 2 阶元 $a_1\in G\backslash H$. 同样有 $b^{a_1}=b^{-1}$，则 $|ba_1a|=6$，矛盾. 于是 $G=H$.

若 $P_3\ntriangleleft G$，因 $n_9=0$ 且 $n_3=4$，则 $P_3\cong C_3$. 若 $\alpha\geqslant 4$，则 G 到 S_4 的同态核 $K=\bigcap N_G(P_3^x)$ 为非平凡的 2-群，显然 $K\times P_3$. 故存在 6 阶元，矛盾. 因此 $\alpha\leqslant 3$. 若 $P_2\ntriangleleft G$，则 $G\cong S_4$，而 $6\in\pi_e(S_4)$，矛盾. 于是 $P_2\lhd G$. 若 $\alpha=3$，则 $G/Z(G)\cong A_4$，此时 Sylow 2-子群为四元数群，矛盾于 $n_4=0$. 于是 $\alpha\leqslant 2$. 因为 $n_4=0$，$P_3\ntriangleleft G$，所以 $G\cong A_4$.

引理 5　设 G 为群且 $|G|=2^\alpha(\alpha\neq 0)$. 若 $|C(G)|=|G|-4$，则 G 同构于下列群之一：

C_8，D_{16}，$C_2\times C_2\times C_4$，$\langle a,b,c\mid a^4=b^2=c^2=1,[b,c]=a^2,[a,c]=[a,b]=1\rangle$，

$\langle a,b,c\mid a^4=b^2=c^2=1,[a,c]=b,[a,b]=[b,c]=1\rangle$，$D_8\times C_2\times C_2$.

证 假设 $n_8 \geqslant 1$. 因为 $\phi(8)=4$，所以 $n_8 = n_4 = 1$. 设 $a \in G$ 且 $|a| = 8$. 显然 $\langle a\rangle \trianglelefteq G$. 因为 $n_8(C_2 \times C_8) > 1$，所以对任意的 2 阶元 $x \in G\backslash\langle a\rangle$，有 $[a, x] \neq 1$. 若 $a^x = a^3$，则 $|ax| = 4$；若 $a^x = a^5$，则 $|ax| = 8$，均矛盾. 因此 $a^x = a^{-1}$. 若 K 为 G 的 16 阶子群且 $a \in K$，则有 $K \cong D_{16}$. 若 $\alpha > 4$，则存在 32 阶子群 $M > K$ 且存在不同的 2 阶元 $x, y \in M\backslash K$，有 $a^x = a^{-1} = a^y$. 因为 $n_8 = n_4 = 1$，所以 $|xy| = 2$，则 $xy = yx$. 于是 $|axy| = 8$，矛盾. 因此 $\alpha \leqslant 4$. 故 $G \cong C_8, D_{16}$.

设 $n_8 = 0$. 若 $\exp(G) = 2$，则 $|C(G)| = |G|$. 因此 $\exp(G) = 4$. 于是由(1)式知 $n_4 = 4$. 显然 $\alpha \geqslant 4$. 由文献[7]的定理 2.6.3，有 14 种 16 阶子群. 其中 4 阶循环子群个数不大于 4 的只有：

$G_1 \cong \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, [b, c] = a^2, [a, c] = [a, b] = 1\rangle$

$G_2 \cong \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, [a, c] = b, [a, b] = [b, c] = 1\rangle$

$G_3 \cong C_2 \times C_2 \times C_4 \cong \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, [b, c] = [a, c] = [a, b] = 1\rangle$

$D_8 \times C_2 \cong \langle a, b, c \mid a^4 = b^2 = c^2 = 1, a^b = a^{-1}, [a, c] = [b, c] = 1\rangle$

其中 $n_4(G_1) = n_4(G_2) = n_4(G_3) = 4$，$n_4(D_8 \times C_2) = 2$.

当 $\alpha = 4$ 时，$G \cong G_1, G_2, G_3$.

当 $\alpha \geqslant 5$ 时. 设 $G \geqslant M > H$，其中 M, H 依次为 G 的 32，16 阶子群. 存在 2 阶元 $d \in M\backslash H$，使得 $M = \langle d\rangle \ltimes H$. 下面证明 $M \cong D_8 \times C_2 \times C_2$.

设 $x \in M\backslash H$. 当 $H \cong G_1, G_2, G_3$ 时，$n_4(H) = 4$，于是 $x^2 = 1$. 显然对于 $h \in H$，有 $(xh)^2 = 1$. 于是 $|h| = 2$ 时有 $xh = hx$. 若 $H \cong G_1$，则 $1 = xbcxbc = a^2$，矛盾. 若 $H \cong G_2$，则 $1 = xacxac = b$，矛盾. 若 $H \cong G_3$，则 $a^d = a^{-1}$，$[a, d] = [b, d] = 1$. 因此 $M \cong D_8 \times C_2 \times C_2$. 下面考虑 $H \cong D_8 \times C_2$. 因为 $n_4(D_8 \times C_2) = 2 < 4$，所以存在 $h \in H$，使得 $|hd| = 4$.

(i) 假设对任意的 $h \in H$ 且 $|h| = 4$，有 $|hd| = 4$. 因为 $n_4 \leqslant 4$，$n_4(H) = 2$，所以对任意的 $x \in H$ 且 $|x| = 2$，有 $|xd| = 2$，从而 $xd = dx$. 于是$[b, d] = [c, d] = 1$. 若 $a^d = a^{-1}$，则 $|ad| = 2$，矛盾于假设，故 $a^d = a, ac, a^{-1}c$. 若 $a^d = ac$，则 $1 = (abd)^2 = c$，矛盾. 若 $a^d = a^{-1}c$，则 $1 = (abd)^2 = a^2c$，矛盾. 于是 $a^d = a$，因此 $M \cong D_8 \times C_2 \times C_2$.

(ii) 假设存在 $h \in H$ 且 $|h| = 4$，有 $|hd| = 2$. 于是 $h^d = h^{-1}$. 不妨假设 $h = a$. 因为 $Z(H) = \langle a^2, c\rangle$，所以 $c^d = a^2, c, a^2c$. 若 $c^d = a^2$，则 $a^2 = (a^2)^d = c$，矛盾. 因此 $c^d = c, a^2c$. 假设 $b^d = a^ib^jc^k (0 \leqslant i \leqslant 2, 0 \leqslant j, k \leqslant 1)$. 若 $j = 0$，则 $H = H^d = \langle a, c\rangle$，矛盾，故 $j = 1$. 若 $i = \pm 1$，则 $|bd| = 8$，矛盾于 $\exp(G) = 4$，故 $i = 0, 2$. 又因为

$$b = b^{d^2} = a^{-i}(a^ibc^k)(c^d)^k = bc^k(c^d)^k$$

所以 $k = 1$ 时有 $c^d = c$. 下面分情况讨论：

1) $a^d = a^{-1}$, $b^d = a^ibc$, $c^d = c$. 当 $i = 0, 2$ 时，$\langle a\rangle, \langle ac\rangle, \langle bd\rangle, \langle abd\rangle, \langle bdc\rangle$ 为不相同的 4 阶循环子群，矛盾.

2) $a^d = a^{-1}$, $b^d = a^ib$, $c^d = c$. 若 $i = 0$，由生成关系可知 $M \cong D_8 \times C_2 \times C_2$. 若 $i = 2$，则$[b, d] = a^2$，由文献[7]的定理 2.6.3 知 $\langle a, b, d\rangle \cong Q_8 * C_4$. 因为 $M \cong \langle a, b, d\rangle \times \langle c\rangle$ 且 $n_4(Q_8 * C_4) = 4$，所以 $n_4(M) > 4$，矛盾.

3) $a^d = a^{-1}$, $b^d = a^ib$, $c^d = a^2c$. 若 $i = 0$，则$\langle a\rangle, \langle ac\rangle, \langle acd\rangle, \langle cd\rangle, \langle bcd\rangle$ 为不相同的 4 阶循环子群，矛盾. 若 $i = 2$，则$\langle a\rangle, \langle ac\rangle, \langle bd\rangle, \langle cd\rangle, \langle acd\rangle$ 为不相同的 4 阶循环子群，矛盾.

至此，我们证明了 $M \cong D_8 \times C_2 \times C_2$. 若 $G > M$，因为 $n_4(M) = 4$，所以对任意的 $x \in G\backslash M$，均有 $x^2 = 1$. 于是 $axax = 1$，即 $a^x = a^{-1}$. 当 $|x| = 2$ 时，$xd = xd$. 因 $|adx| = 4$，则 $n_4(G) > 4$，矛盾. 于是$G \cong D_8 \times C_2 \times C_2$.

定理 1 的证明 *必要性* 由引理 3，有 $|G| = 2^\alpha 3^\beta, 2^\alpha, 3^\beta$. 设 $|G| = 3^\beta$. 因为 $n_9 = 0$，所以$\exp(G) = 3$ 且 $n_3 = 4$，又因为 $n_3(C_3 \times C_3) = 4$，所以 $G \cong C_3 \times C_3$. 再由引理 5，得证.

充分性 若 G 同构于定理 1 中的群，则容易验证 $|C(G)| = |G| - 4$.

参考文献：

[1] TĂRNĂUCEANU M. Subgroup Commutativity Degrees of Finite Groups [J]. J Algebra, 2009, 321: 2508－2520.

[2] WU Z F, SHI J T. A Note on the Number of Non-Cyclic Subgroups of Finite Groups [J]. International Journal of Algebra, 2016, 10(2): 81－85.

[3] JAFARI M H, MADADI A R. On the Number of Cyclic Subgroups of a Finite Group [J]. Bull Korean Math Soc, 2017 (6): 2141－2147.

[4] 薛海波，吕　恒. 非交换子群具有极小中心化子的有限 p-群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(8)：12－15.

[5] 张　钰，吕　恒. 有限交换群的直积分解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(12)：61－64.

[6] SAG T W, WAMSLEY J W. Minimal Presentations of Groups of Order 2^n, $n\leqslant 6$ [J]. J Aust Math Soc, 1973, 15: 461－469.

[7] 徐明耀，曲海鹏. 有限 p-群 [M]. 北京：北京大学出版社，2010.

[8] ROSE H E. A Course on Finite Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

[9] KURZWEIL H, STELLMACHER B. The Theory of Finite Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

[10] TĂRNĂUCEANU M. Finite Groups with a Certain Number of Cyclic Subgroups II [EB/OL]. [2018－05－02]. http://arxiv.org/abs/1604.04974.

[11] ZHOU W. On the Munber of Cyclic Subgroups in Finite Groups [EB/OL]. [2018－05－02]. http://arxiv.org/abs/1605.00193.

Finite Groups with Specific Number of Cyclic Subgroups

JIANG Fu-ming,　ZHOU　Wei

School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group, $C(G)$ is the set of cyclic subgroup of G. $|C(G)|$ has a certain effect on the structure of G. It is well-know that G is a elementary abelian subgroups if and only if $|C(G)|=|G|$ and several authors have investigated groups with $|G|-|C(G)|\leqslant 3$. It is reasonable to describe the finite groups G having $|G|-4$ cyclic subgroups by using the equality relation of the number of cyclic subgroups.

Key words: finite groups; 2-groups; cyclic subgroups

责任编辑　廖　坤