第 44 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 2 月
Vol. 44 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.005

# 弱链对角占优 $B$-矩阵线性互补问题的误差界新估计①

徐玉梅， 王 峰

贵州民族大学 数据科学与信息工程学院，贵阳 550025

**摘要：** 利用弱链对角占优 $M$-矩阵的逆矩阵的无穷大范数的范围，结合不等式放缩技术，给出了弱链对角占优 $B$-矩阵线性互补问题误差界新的估计式，进而给出 $B$-矩阵线性互补问题误差界的估计式. 新估计式改进了已有文献的结果.

**关 键 词：** 线性互补问题；误差界；弱链对角占优 $B$-矩阵；$B$-矩阵

**中图分类号：** O151.21 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2019)02-0018-07

线性互补问题在众多领域具有广泛的应用，如数学规划、最优停止、期权定价、市场均衡、自由边界和弹性接触等[1-3]. 线性互补问题的数学模型为：求 $z \in \boldsymbol{R}^n$，满足：

$$\boldsymbol{Az} + \boldsymbol{q} \geqslant 0 \qquad (\boldsymbol{Az} + \boldsymbol{q})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{z} = 0 \qquad \boldsymbol{z} \geqslant 0$$

记作 $LCP(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{q})$，其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^n$ 为给定的矩阵和向量.

线性互补问题不论是解的存在性、唯一性，还是算法的收敛性，都与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的结构有着密切的关系. 如当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $P$-矩阵(即它的所有主子式都是正的[4])时，线性互补问题有唯一解[2]. 文献[5]给出了如下结果：设 $\boldsymbol{A}$ 是 $P$-矩阵，则

$$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \|_\infty \leqslant \max_{d\in[0,1]^n} \| (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D} + \boldsymbol{DA})^{-1} \|_\infty \| r(\boldsymbol{x}) \|_\infty$$

其中 $\boldsymbol{x}^*$ 是 $LCP(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{q})$ 的解，$r(\boldsymbol{x}) = \min\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{q}\}$，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)(0 \leqslant d_i \leqslant 1)$. 近年来，众多学者对特殊结构矩阵线性互补问题解的误差界、扰动界进行了分析，给出了一系列估计式[6-13]. 本文在文献[14]的基础上，继续讨论弱链对角占优 $B$-矩阵线性互补问题解的误差界，获得了新估计式. 同时，证明了新估计式在一定条件下优于文献[12-13]的结果. 最后，用数值算例表明了所得结果的有效性.

## 1 预备知识

用 $\mathbb{N}_+$ 表示全体正整数的集合. 记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，若

$$| a_{ii} | > r_i(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} | a_{ij} | \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}_+$$

---

① 收稿日期：2018-03-05

基金项目：国家自然科学基金项目(11601473)；贵州省科学技术基金项目(20181079)；贵州省教育厅自然科学基金项目(2015420).

作者简介：徐玉梅(1992-)，女，硕士研究生，主要从事数值计算和数学模型的研究.

通信作者：王 峰，博士，教授.

则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优的[15]；若 $a_{ij}<0(i\neq j)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $Z$-矩阵[4]；若 $\boldsymbol{A}$ 为 $Z$-矩阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $M$-矩阵[15]；若 $|a_{ii}|\geqslant r_i(\boldsymbol{A})(\forall i\in\mathbb{N}_+)$，且对每个 $i\notin J(\boldsymbol{A})=\{i\in\mathbb{N}_+:|a_{ii}|>r_i(\boldsymbol{A})\}\neq\varnothing$，存在非零元素链 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_rj}$，满足 $j\in J(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为弱链对角占优矩阵[15].

**定义 1**[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，若对任意的 $i,j\in\mathbb{N}_+$，有：

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_+}a_{ik}>0\qquad \frac{1}{n}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}_+}a_{ik}\Big)>a_{ij}\qquad i\neq j$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $B$-矩阵.

**定义 2**[13]　设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，若 $\boldsymbol{M}$ 可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中：

$$\boldsymbol{B}^{+}=\begin{pmatrix} m_{11}-r_1^{+} & \cdots & m_{1n}-r_1^{+}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{n1}-r_n^{+} & \cdots & m_{nn}-r_n^{+}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} r_1^{+} & \cdots & r_1^{+}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r_n^{+} & \cdots & r_n^{+}\end{pmatrix}\tag{1}$$

$r_i^{+}=\max\{0,m_{ij}:j\neq i\}$，$\boldsymbol{B}^{+}$ 是弱链对角占优矩阵且其主对角元素为正，则称 $\boldsymbol{M}$ 为弱链对角占优 $B$-矩阵.

**引理 1**[14]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优的 $M$-矩阵，则

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\infty}<\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}(1-u_i(\boldsymbol{A})h_i(\boldsymbol{A}))}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j(\boldsymbol{A})}{1-u_j(\boldsymbol{A})h_j(\boldsymbol{A})}\right)\right]$$

其中 $\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j(\boldsymbol{A})}{1-u_j(\boldsymbol{A})h_j(\boldsymbol{A})}\right)=1$，$u_j(A),h_j(A)$ 见后面的记号说明.

**引理 2**[12]　设 $\gamma>0$ 且 $\eta\geqslant 0$，则对任意的 $x\in[0,1]$，有：

$$\frac{1}{1-x+\gamma x}\leqslant\frac{1}{\min\{\gamma,1\}}\qquad \frac{\eta x}{1-x+\gamma x}\leqslant\frac{\eta}{\gamma}$$

为叙述方便，给出如下记号：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，$i,j,k\in\mathbb{N}_+$，$i\neq j$，$i+1\leqslant k\leqslant n$，记：

$$u_i(\boldsymbol{A})=\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|\qquad u_n(\boldsymbol{A})=0$$

$$l_{ki}(\boldsymbol{A})=\frac{1}{|a_{kk}|}\sum_{j=i,j\neq k}^{n}|a_{kj}|\qquad l_i(\boldsymbol{A})=\max_{i\leqslant k\leqslant n}\{l_{ki}(\boldsymbol{A})\}\qquad l_n(\boldsymbol{A})=0$$

$$t_i(\boldsymbol{A})=\frac{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\qquad s_{ji}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|t_k(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|}\qquad r_i(\boldsymbol{A})=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|}\right\}$$

$$m_{ji}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|}\qquad q_{ji}(\boldsymbol{A})=\min\{s_{ji}(\boldsymbol{A}),m_{ji}(\boldsymbol{A})\}$$

$$h_{ki}(\boldsymbol{A})=\frac{|a_{ki}|}{|a_{kk}|q_{ki}(\boldsymbol{A})-\sum_{j=i+1,j\neq k}^{n}|a_{kj}|q_{ki}(\boldsymbol{A})}\qquad h_i(\boldsymbol{A})=\begin{cases}\max\limits_{i+1\leqslant k\leqslant n}\{h_{ki}(\boldsymbol{A})\} & 1\leqslant i\leqslant n-1\\ 0 & i=n\end{cases}$$

## 2　主要结论

文献[9]给出结果：设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM})^{-1}\|_{\infty}\leqslant\frac{n-1}{\min\{\beta,1\}}\tag{2}$$

其中 $\beta=\min\limits_{i\in\mathbb{N}_+}\{\beta_i\}$ 和 $\beta_i=b_{ii}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|b_{ij}|$.

文献[12]给出了优于(2)式的估计式：设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right)\tag{3}$$

其中 $\bar{\beta}_i=b_{ii}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|l_i(\boldsymbol{B}^{+})$，$l_i(\boldsymbol{B}^{+})=\max\limits_{k\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{b_{ii}}\sum\limits_{j=k,j\neq i}^{n}|b_{ij}|\right\}$ 且 $\prod\limits_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum\limits_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right)=1$.

文献[13]给出了新估计式：设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j}\tag{4}$$

其中 $\tilde{\beta}_i=b_{ii}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|>0$ 且 $\prod\limits_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j}=1$.

下面，给出弱链对角占优 $B$-矩阵线性互补问题解的新误差界.

**定理 1** 设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\hat{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right]\tag{5}$$

其中 $\hat{\beta}_i=b_{ii}-\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|h_i(\boldsymbol{B}^{+})$，且 $\prod\limits_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\hat{\beta}_j}\sum\limits_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right]=1$.

**证** 令 $\boldsymbol{M_D}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM}$，则

$$\boldsymbol{M_D}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}+\boldsymbol{C_D}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DB}^{+}$，$\boldsymbol{C_D}=\boldsymbol{DC}$. 类似于文献[13]中定理 2 的证明，可得 $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}$ 是弱链对角占优 $M$-矩阵，主对角元为正，且

$$\|\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\|_\infty\leqslant\|(\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})^{-1}\boldsymbol{C_D})^{-1}\|_\infty\ \|(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})^{-1}\|_\infty\leqslant(n-1)\ \|(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})^{-1}\|_\infty\tag{6}$$

由引理 1 知

$$\|(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-d_i+b_{ii}d_i)(1-u_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})h_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}))}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{u_j(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})}{1-u_j(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})h_j(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})}\right)$$

由引理 2 知，对任意的 $i,j,k\in\mathbb{N}_{+}$，有：

$$u_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})=\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|d_i}{1-d_i+b_{ii}d_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|}{b_{ii}}=u_i(\boldsymbol{B}^{+})$$

$$h_k(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})=\max_{i+1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|b_{ki}|d_k}{(1-d_k+b_{kk}d_k)q_{ki}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})-\sum\limits_{j=i+1,\,j\neq k}^{n}|b_{kj}|q_{ji}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})d_k}\right\}\leqslant$$

$$\max_{i+1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|b_{ki}|}{b_{kk}q_{ki}(\boldsymbol{B}^{+})-\sum\limits_{j=i+1,j\neq k}^{n}|b_{kj}|q_{ji}(\boldsymbol{B}^{+})}\right\}=h_k(\boldsymbol{B}^{+})<1$$

且

$$\frac{1}{(1-d_i+b_{ii}d_i)(1-u_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})h_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}))}=\frac{1}{1-d_i+b_{ii}d_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|d_ih_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+})}\leqslant$$

$$\frac{1}{\min\left\{b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|h_i(\boldsymbol{B}^+),\ 1\right\}}=\frac{1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}} \tag{7}$$

进而，由引理 2 知

$$\frac{u_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^+)}{1-u_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^+)h_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^+)}=\frac{\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|d_i}{1-d_i+b_{ii}d_i-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|d_ih_i(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^+)}\leqslant\frac{\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|}{b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|h_i(\boldsymbol{B}^+)}=\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_i}\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}| \tag{8}$$

由(6) 式和(7) 式知

$$\|(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^+)^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right] \tag{9}$$

因此，由(6) 式及(9) 式知(5) 式成立.

**推论 1**　设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^++\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^+=(b_{ij})$ 形如(1) 式，则

$$\max_{d\in[0,\ 1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right] \tag{10}$$

其中 $\overset{\wedge}{\beta}_i$ 如定理 1 所定义.

接下来，对(4) 式及(5) 式进行比较.

**定理 2**　设 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优 $B$-矩阵，可表示为 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^++\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}^+=(b_{ij})$ 形如(1) 式，且 $h_i(\boldsymbol{B}^+)\leqslant l_i(\boldsymbol{B}^+)(\forall i\in\mathbb{N}_+)$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j}$$

其中 $\bar{\beta}_i$，$\tilde{\beta}_i$ 及 $\overset{\wedge}{\beta}_i$ 分别如(3) 式、(4) 式及(5) 式所定义.

**证**　因 $\boldsymbol{B}^+$ 是弱链对角占优的，且主对角元为正，故对任意的 $i\in\mathbb{N}_+$，有

$$0\leqslant h_i(\boldsymbol{B}^+)\leqslant l_i(\boldsymbol{B}^+)<1 \tag{11}$$

由(11) 式可知，对任意的 $i\in\mathbb{N}_+$，有

$$\bar{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|l_i(\boldsymbol{B}^+)\leqslant b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|h_i(\boldsymbol{B}^+)=\overset{\wedge}{\beta}_i \tag{12}$$

由(12) 式，可得对任意的 $i\in\mathbb{N}_+$，有

$$\frac{1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}}\leqslant\frac{1}{\min\{\bar{\beta}_i,\ 1\}} \tag{13}$$

且对任意的 $1\leqslant j\leqslant n-1$，有

$$1+\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\leqslant1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}| \tag{14}$$

由(13) 式及(14) 式，可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\overset{\wedge}{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\overset{\wedge}{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,\ 1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right) \tag{15}$$

另外，注意到：

$$\tilde{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|\qquad\bar{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|l_i(\boldsymbol{B}^+)$$

且 $l_{ki}(\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{D}}^{+}) \leqslant l_{k}(\boldsymbol{B}^{+}) < 1$. 因此，对任意的 $i \in \mathbb{N}_{+}$，有 $\tilde{\beta}_i \leqslant \bar{\beta}_i$，且

$$\frac{1}{\min\{\bar{\beta}_i,\ 1\}} \leqslant \frac{1}{\min\{\tilde{\beta}_i,\ 1\}} \tag{16}$$

同时，对任意的 $1 \leqslant j \leqslant n-1$，有

$$1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n} |b_{jk}| \leqslant 1 + \frac{1}{\tilde{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n} |b_{jk}| = \frac{1}{\tilde{\beta}_j}\left(\tilde{\beta}_j + \sum_{k=j+1}^{n} |b_{jk}|\right) = \frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j} \tag{17}$$

由(16)式及(17)式，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,\ 1\}} \prod_{j=1}^{i-1}\left(1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n} |b_{jk}|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i,\ 1\}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j} \tag{18}$$

综上所述，由(15)式及(18)式知结论成立.

## 3 数值算例

**例 1** 考虑 $B$-矩阵[12]

$$\boldsymbol{M}_k = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 1.7 & 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & -0.1\dfrac{k}{k+1} & 1.8 & 0.7 \\ 0 & 0.7 & 0.8 & 1.8 \end{pmatrix} \qquad k \geqslant 1$$

则 $\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{B}_k^{+} + \boldsymbol{C}_k$，其中

$$\boldsymbol{B}_k^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.1 & 0 \\ -0.8 & 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & -0.1\dfrac{k}{k+1} - 0.8 & 1 & -0.1 \\ -0.8 & -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由(2)式得

$$\max_{d \in [0,\ 1]^n} \| (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D} - \boldsymbol{DM})^{-1} \|_{\infty} \leqslant \frac{1}{\min\{\beta,\ 1\}} = 30(k+1)$$

易见 $30(k+1) \to +\infty\ (k \to +\infty)$.

由(3)式得

$$\max_{d \in [0,\ 1]^n} \| (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D} - \boldsymbol{DM})^{-1} \|_{\infty} \leqslant 14.104\ 4$$

由(4)式得

$$\max_{d \in [0,\ 1]^n} \| (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D} - \boldsymbol{DM})^{-1} \|_{\infty} \leqslant 15.267\ 5$$

由(5)式得

$$\max_{d \in [0,\ 1]^n} \| (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D} - \boldsymbol{DM})^{-1} \|_{\infty} \leqslant 12.985\ 3$$

可见(5)式优于(2)-(4)式.

**例 2** 考虑弱链对角占优 $B$-矩阵[13]

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ -0.1 & 1.5 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & -0.1 & 1.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.8 & 1.8 \end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}^{+}+\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{B}^{+}=\begin{pmatrix} 1 & -0.3 & -0.1 & 0 \\ -0.6 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & -0.6 & 1 & -0.4 \\ -0.4 & -0.4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由(4) 式得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant 41.1111$$

由(5) 式得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{DM})^{-1}\|_\infty\leqslant 34.7556$$

可见(5) 式优于(4) 式.

## 4 结 论

文中讨论了弱链对角占优 $B$-矩阵线性互补问题解的误差界估计问题，得到了几个新的上界估计式，理论证明及数值算例均表明了新估计式在一定条件下优于文献[9,12－13] 的结果.

**参考文献：**

[1] CHEN X J，XIANG S H. Perturbation Bounds of $P$-Matrix Linear Complementarity Problems [J]. SIAM Journal on Optimization，2007，18(4)：1250－1265.

[2] COTTLE R W，PANG J S，STONE R E. The Linear Complementarity Problem [M]. San Diego：Academic Press，1992.

[3] MURTY K G. Linear Complementarity，Linear and Nonlinear Programming [M]. Berlin：Heldermann Verlag，1998.

[4] PEÑA J M. A Class of $P$-Matrices with Applications to the Localization of the Eigenvalues of a Real Matrix [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，2001，22(4)：1027－1037.

[5] CHEN X J，XIANG S H. Computation of Error Bounds for $P$-Matrix Linear Complementarity Problem [J]. Mathematical Programming，2006，106(3)：513－525.

[6] CHEN T T，LI W，WU X P，et al. Error Bounds for Linear Complementarity Problems of $MB$-Matrices [J]. Numerical Algorithms，2015，70(2)：341－356.

[7] DAI P F. Error Bounds for Linear Complementarity Problems of $DB$-Matrices [J]. Linear Algebra and its Applications，2011，434(1)：830－840.

[8] DAI P F，LU C J，LI Y T. New Error Bounds for the Linear Complementarity Problem with an $SB$-Matrix [J]. Numerical Algorithms，2013，64(4)：741－757.

[9] GARCÍA-ESNAOLA M，PEÑA J M. Error Bounds for Linear Complementarity Problems for $B$-Matrices [J]. Applied Mathematics Letters，2009，22(7)：1071－1075.

[10] GARCÍA-ESNAOLA M，PEÑA J M. Error Bounds for Linear Complementarity Problems Involving $BS$-Matrices [J]. Applied Mathematics Letters，2012，25(10)：1379－1383.

[11] GARCÍA-ESNAOLA M，PEÑA J M. $B$-Nekrasov Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems [J]. Numerical Algorithms，2016，72(2)：435－445.

[12] LI C Q，LI Y T. Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems for $B$-Matrices [J]. Applied Mathematics Letters，2016，57(1)：108－113.

[13] LI C Q，LI Y T. Weakly Chained Diagonally Dominant $B$-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Prob-

lems [J]. Numerical Algorithms, 2016, 73(4): 985-998.

[14] 蒋建新, 李艳艳. 弱链对角占优矩阵的逆矩阵无穷范数的新上界 [J]. 咸阳师范学院学报, 2016, 31(2): 53-55.

[15] SHIVAKUMAR P N, CHEW K H. A Sufficient Condition for Nonvanishing of Determinants [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1974, 43(1): 63-66.

# New Error Bounds for Linear Complementarity Problems of Weakly Chained Diagonally Dominant Matrices

XU Yu-mei, WANG Feng

*College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China*

**Abstract**: With the range for the infinity norm of inverse matrix of a weakly chained diagonally dominant $M$-matrix and combining some techniques of inequalities, some new error bounds for the linear complementarity problem are obtained when the involved matrix is a weakly chained diagonally dominant $B$-matrix. Theory analysis and numerical examples show that these bounds improve existed results.

**Key words**: linear complementarity problems; error bounds; weakly chained diagonally dominant $B$-matrices; $B$-matrices

责任编辑 廖 坤