第 44 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2019 年 2 月
Vol. 44 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.006

线性变换半群 $\mathscr{T}_{X\times X}$ 的格林关系和正则元①

李晓敏， 罗永贵， 赵 平

贵州师范大学 数学科学学院，贵阳 550025

摘要：设 X 是自然数集 $\mathbb{N}$ 或整数集 $\mathbb{Z}$，$\mathscr{T}_{X\times X}$ 是 $X\times X$ 上的线性变换半群. 通过分析整除关系，获得了半群 $\mathscr{T}_{X\times X}$ 的格林关系和正则元.

关 键 词：线性变换半群；整除性；格林关系；正则元；幂等元

中图分类号：O152.7 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2019)02-0025-04

设 X 是自然数集 $\mathbb{N}$ 或整数集 $\mathbb{Z}$，对 $\forall x\in X$，定义线性变换 $\mathscr{A}_{(a,b)}: X\longrightarrow X$，$x\longmapsto ax+b$. 即 $(x)\mathscr{A}_{(a,b)}=ax+b$. 令 $\mathscr{T}_{X\times X}=\{\mathscr{A}_{(a,b)}:\forall a,b\in X\}$. 于是，对 $\forall x\in X$，$\forall \mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)},\mathscr{A}_{(e,f)}\in\mathscr{T}_{X\times X}$，在 $\mathscr{T}_{X\times X}$ 上定义运算“•”，使得

$$\begin{aligned}(x)[\mathscr{A}_{(a,b)}\bullet\mathscr{A}_{(c,d)}]=&((x)\mathscr{A}_{(a,b)})\mathscr{A}_{(c,d)}=(ax+b)\mathscr{A}_{(c,d)}=\\&c(ax+b)+d=acx+bc+d=(ac)x+(bc+d)=\\&(x)\mathscr{A}_{(ac,bc+d)}\end{aligned}$$

即 $\mathscr{A}_{(a,b)}\bullet\mathscr{A}_{(c,d)}=\mathscr{A}_{(ac,bc+d)}\in\mathscr{T}_{X\times X}$. 易证

$$[\mathscr{A}_{(a,b)}\bullet\mathscr{A}_{(c,d)}]\bullet\mathscr{A}_{(e,f)}=\mathscr{A}_{(a,b)}\bullet[\mathscr{A}_{(c,d)}\bullet\mathscr{A}_{(e,f)}]$$

由此可见，$\mathscr{T}_{X\times X}$ 关于运算“•”是半群，称为 $X\times X$ 上的线性变换半群. 为了方便，文中将省略运算“•”. 对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)}\in\mathscr{T}_{X\times X}$，有 $\mathscr{A}_{(a,b)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$，当且仅当对 $\forall x\in X$，有 $(x)\mathscr{A}_{(a,b)}=(x)\mathscr{A}_{(c,d)}$，即 $ax+b=cx+d$. 由 x 的任意性可知，令 $x=0$，可得 $b=d$. 再令 $x=1$，必有 $a=c$. 显然有 $\mathscr{A}_{(a,b)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 当且仅当 $a=c$ 和 $b=d$.

设 S 是半群，$a,e\in S$. 若存在 $b\in S$，使得 $a=aba$，则称 a 是半群 S 的正则元. 若 $e^2=ee=e$，则称 e 是半群 S 的幂等元. 易见，半群 S 中的幂等元一定是正则元，但正则元不一定是幂等元. 对 $\forall a,b\in S$，在半群 S 上定义等价关系：

$\mathscr{L}$：$a\mathscr{L}b$ 当且仅当存在 $x,y\in S^1$，使得 $xa=b$，$yb=a$；

$\mathscr{R}$：$a\mathscr{R}b$ 当且仅当存在 $x,y\in S^1$，使得 $ax=b$，$by=a$；

$\mathscr{J}$：$a\mathscr{J}b$ 当且仅当存在 $x,y,u,v\in S^1$，使得 $xay=b$，$ubv=a$；

$\mathscr{H}=\mathscr{L}\cap\mathscr{R}$，$\mathscr{D}=\mathscr{L}\vee\mathscr{R}$.

众所周知，文献[1]刻划了 $\mathscr{D}=\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathscr{R}\circ\mathscr{L}$ 且 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{J}$. 这 5 个等价关系统称为半群 S 上的格林关系，对半群的发展有着至关重要的作用. 对于半群的格林关系，正则元及其幂等元的研究目前已有许多结果[1-7]. 文献[1]考虑了格林关系的来龙去脉，得到了更多的广义格林关系，使半群理论得到更进一步的发展. 文献[2]获得了一类保序且压缩的部分有限变换半群的格林关系和正则元. 文献[3-7]考虑了无限集

① 收稿日期：2018-04-01
基金项目：国家自然科学基金项目(11461014).
作者简介：李晓敏(1994-)，女，硕士研究生，主要从事半群代数理论的研究.
通信作者：罗永贵，讲师.

上具有某些特殊等价关系的变换半群的格林关系和正则元. 文献[8]获得了 $CPO_n(A)$ 的格林关系. 文献[9]获得了关于幂等元格林关系劣化的注记. 文献[10]获得了保等价关系的变换半群的组合结果.

本文在文献[1-10]的基础上获得了集合 $X \times X$ 上的线性变换半群 $\mathscr{T}_{X\times X}$ 的格林关系、正则元及其幂等元的等价刻划.

本文未定义的术语及符号参见文献[11-12].

1 半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 的格林关系及正则元

下面讨论线性变换半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 的格林关系、正则元及幂等元. 首先刻划半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 的格林关系 $\mathscr{L}$.

定理 1 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)}, \mathscr{A}_{(c,d)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 下列条件等价:

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{L} \mathscr{A}_{(c,d)}$;

(ii) $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

证 (i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{L} \mathscr{A}_{(c,d)}$, 则存在 $\mathscr{A}_{(x,y)}, \mathscr{A}_{(u,v)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 使得 $\mathscr{A}_{(x,y)}\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(u,v)}\mathscr{A}_{(c,d)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 即 $\mathscr{A}_{(xa,ya+b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(uc,vc+d)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 进而有 $xa = c$ 且 $uc = a$, 可得 $a \mid c$ 且 $c \mid a$, 即 $a = c$. 注意到 $ya + b = d$ 且 $vc + d = b$. 若 $a = 0$, 则 $a = c = 0$ 且 $b = d$. 若 $a > 0$, 必有 $(y+v)a = ya + va = ya + vc = (d-b) + (b-d) = 0$, 可知 $y + v = 0$. 由 $y, v \in \mathbb{N}$ 可得 $y = v = 0$. 再由 $ya + b = d$ 可知 $b = d$. 因此 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

(ii)⇒(i) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$, 则存在 $\mathscr{A}_{(1,0)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 使得 $\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(c,d)} = \mathscr{A}_{(c,d)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 即 $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{L} \mathscr{A}_{(c,d)}$.

对偶地, 便得到如下定理:

定理 2 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)}, \mathscr{A}_{(c,d)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 下列条件等价:

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{R} \mathscr{A}_{(c,d)}$;

(ii) $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

结合定理 1 和定理 2 立即得到如下推论:

推论 1 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)}, \mathscr{A}_{(c,d)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 则:

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{H} \mathscr{A}_{(c,d)}$ 当且仅当 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$;

(ii) $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{D} \mathscr{A}_{(c,d)}$ 当且仅当 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

定理 3 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)}, \mathscr{A}_{(c,d)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 下列条件等价:

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{J} \mathscr{A}_{(c,d)}$;

(ii) $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

证 (i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{J} \mathscr{A}_{(c,d)}$, 则存在 $\mathscr{A}_{(x,y)}, \mathscr{A}_{(u,v)}, \mathscr{A}_{(p,q)}, \mathscr{A}_{(e,f)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 使得 $\mathscr{A}_{(x,y)}\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(u,v)} = \mathscr{A}_{(ax,ay+b)}\mathscr{A}_{(u,v)} = \mathscr{A}_{(axu,ayu+bu+v)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(p,q)}\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(e,f)} = \mathscr{A}_{(pc,cq+d)}\mathscr{A}_{(e,f)} = \mathscr{A}_{(pce,ceq+de+f)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 进而有 $axu = c$ 且 $pce = a$, 可知 $a \mid c$ 且 $c \mid a$, 即 $a = c$ 且 $x = u = e = p = 1$. 再由 $ceq + de + f = b$ 且 $ayu + bu + v = d$ 可知 $aq + d + f = b$ 且 $ay + b + v = d$, 必有 $aq + f = b - d$ 且 $ay + v = d - b$, 进一步有 $aq + f + ay + v = 0$. 注意到 $a, q, f, y, v \in \mathbb{N}$, 可得 $aq = f = ay = v = 0$. 再由 $d - b = ay + v = 0 + 0 = 0$ 可知 $b = d$. 于是 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$.

(ii)⇒(i) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$, 则存在 $\mathscr{A}_{(1,0)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 使得 $\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(1,0)} = \mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(1,0)} = \mathscr{A}_{(c,d)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 即 $\mathscr{A}_{(a,b)} \mathscr{J} \mathscr{A}_{(c,d)}$.

由定理 1、定理 2、推论 1 及定理 3 立即有如下推论:

推论 2 在半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 上, 有 $\mathscr{H} = \mathscr{L} = \mathscr{R} = \mathscr{D} = \mathscr{J}$.

定理 4 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, 下列条件等价:

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是幂等元;

(ii) $a = 0$, $b \in \mathbb{N}$, 或 $a = 1$, $b = 0$.

证 (i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是幂等元, 有 $\mathscr{A}_{(a,b)}{}^2 = \mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(a,b)} = \mathscr{A}_{(a^2,ab+b)} = \mathscr{A}_{(a,b)}$, 则 $a^2 = a$ 且 $a \in \mathbb{N}$, 必有 $a = 1$ 或 $a = 0$. 当 $a = 1$ 时, 由 $ab + b = b$ 可知 $b = 0$; 当 $a = 0$ 时, 由 $ab + b = b$ 可得 $b \in \mathbb{N}$.

(ii)⇒(i) 若 $a=0$，$b\in\mathbb{N}$，则 $\mathscr{A}_{(0,b)}{}^2=\mathscr{A}_{(0,b)}\mathscr{A}_{(0,b)}=\mathscr{A}_{(0,b)}$. 若 $a=1$，$b=0$，则 $\mathscr{A}_{(1,0)}{}^2=\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(1,0)}=\mathscr{A}_{(1,0)}$. 由此可见，$\mathscr{A}_{(0,b)}$ 和 $\mathscr{A}_{(1,0)}$ 都是幂等元.

结合定理 3(ii) 以及定理 4 立即得到如下定理：

定理 5　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是 $\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ 上的正则元；

(ii) $a=0$，$b\in\mathbb{N}$，或 $a=1$，$b=0$.

把定理 4 及定理 5 结合起来便得到如下推论：

推论 3　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$，则 $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是正则元当且仅当 $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是幂等元，即 $\mathscr{A}_{(a,b)}{}^2=\mathscr{A}_{(a,b)}$ 当且仅当 $a=0$，$b\in\mathbb{N}$，或 $a=1$，$b=0$.

2　半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 的格林关系及正则元

这里讨论线性变换半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 的格林关系、正则元及幂等元. 首先刻划半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 的格林关系 $\mathscr{R}$.

定理 6　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，则下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{R}\mathscr{A}_{(c,d)}$；

(ii) $a=\pm c$.

证　(i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{R}\mathscr{A}_{(c,d)}$，则存在 $\mathscr{A}_{(i,j)},\mathscr{A}_{(s,t)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，使得 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(i,j)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(s,t)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，即 $\mathscr{A}_{(ai,bi+j)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(cs,ds+t)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，进而有 $ai=c$ 且 $cs=a$，可知 $a\mid c$ 且 $c\mid a$，即 $a=\pm c$.

(ii)⇒(i) 当 $a=c$ 时，存在 $\mathscr{A}_{(1,d-b)},\mathscr{A}_{(1,b-d)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，使得 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(1,d-b)}=\mathscr{A}_{(a,d)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(1,b-d)}=\mathscr{A}_{(a,d)}\mathscr{A}_{(1,b-d)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，即 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{R}\mathscr{A}_{(c,d)}$. 当 $a=-c$ 时，存在 $\mathscr{A}_{(-1,d+b)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，使得 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(-1,b+d)}=\mathscr{A}_{(-a,d)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(-1,b+d)}=\mathscr{A}_{(-a,d)}\mathscr{A}_{(-1,b+d)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，即 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{R}\mathscr{A}_{(c,d)}$.

对偶地，便得到如下定理：

定理 7　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{L}\mathscr{A}_{(c,d)}$；

(ii) $a=\pm c$ 且 $a\mid(b-d)$.

结合定理 6 和定理 7 立即得到如下推论：

推论 4　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，有：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{H}\mathscr{A}_{(c,d)}$ 当且仅当 $a=\pm c$ 且 $a\mid(b-d)$；

(ii) $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{D}\mathscr{A}_{(c,d)}$ 当且仅当 $a=\pm c$.

定理 8　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)},\mathscr{A}_{(c,d)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{J}\mathscr{A}_{(c,d)}$；

(ii) $a=\pm c$.

证　(i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{J}\mathscr{A}_{(c,d)}$，则存在 $\mathscr{A}_{(x,y)},\mathscr{A}_{(u,v)},\mathscr{A}_{(p,q)},\mathscr{A}_{(e,f)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，使得 $\mathscr{A}_{(x,y)}\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(u,v)}=\mathscr{A}_{(ax,ay+b)}\mathscr{A}_{(u,v)}=\mathscr{A}_{(axu,ayu+bu+v)}=\mathscr{A}_{(c,d)}$ 且 $\mathscr{A}_{(p,q)}\mathscr{A}_{(c,d)}\mathscr{A}_{(e,f)}=\mathscr{A}_{(cp,cq+d)}\mathscr{A}_{(e,f)}=\mathscr{A}_{(cep,ceq+de+f)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，进而有 $axu=c$ 且 $cep=a$，可知 $a\mid c$ 且 $c\mid a$，即 $a=\pm c$.

(ii)⇒(i) 当 $a=\pm c$ 时，由定理 6 可知 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{R}\mathscr{A}_{(c,d)}$. 再结合 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{L}\mathscr{A}_{(a,b)}$ 可得 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{D}\mathscr{A}_{(c,d)}$. 再由 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{J}$ 可知 $\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{J}\mathscr{A}_{(c,d)}$.

由定理 6、定理 7、推论 4 及定理 8 可得如下推论：

推论 5　在半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 上，有 $\mathscr{H}=\mathscr{L}\subsetneqq\mathscr{R}=\mathscr{D}=\mathscr{J}$.

定理 9　对 $\forall\mathscr{A}_{(a,b)}\in\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是幂等元；

(ii) $a=0$，$b\in\mathbb{Z}$，或 $a=1$，$b=0$.

证　(i)⇒(ii) 若 $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是幂等元，有 $\mathscr{A}_{(a,b)}{}^2=\mathscr{A}_{(a,b)}\mathscr{A}_{(a,b)}=\mathscr{A}_{(a^2,ab+b)}=\mathscr{A}_{(a,b)}$，则 $a^2=a$ 且 $a\in\mathbb{Z}$，必有 $a=1$ 或 $a=0$. 当 $a=1$ 时，由 $ab+b=b$ 可知 $b=0$；当 $a=0$ 时，由 $ab+b=b$ 可得 $b\in\mathbb{Z}$.

(ii)⇒(i) 若 $a=0$，$b\in\mathbb{Z}$，必有 $\mathscr{A}_{(0,b)}{}^2=\mathscr{A}_{(0,b)}\mathscr{A}_{(0,b)}=\mathscr{A}_{(0,b)}$. 若 $a=1$，$b=0$，可得 $\mathscr{A}_{(1,0)}{}^2=$

$\mathscr{A}_{(1,0)}\mathscr{A}_{(1,0)}=\mathscr{A}_{(1,0)}$. 由此可见，$\mathscr{A}_{(0,b)}$ 和 $\mathscr{A}_{(1,0)}$ 都是幂等元.

结合定理 7(ii) 以及定理 9 立即得到如下定理：

定理 10 对 $\forall \mathscr{A}_{(a,b)} \in \mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$，下列条件等价：

(i) $\mathscr{A}_{(a,b)}$ 是正则元；

(ii) $a=0$，$b\in\mathbb{Z}$，或 $a=1$，$b\in\mathbb{Z}$，或 $a=-1$，$b\in\mathbb{Z}$.

注 1 在半群 $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ 中，幂等元是正则元，但正则元不一定是幂等元.

参考文献：

[1] GUO Y Q，GONG C M，REN X M. A Survey on the Origin and Developments of Green's Relations on Semigroups [J]. 山东大学学报(理学版)，2010，45(8)：1－18.

[2] ZHAO P，YANG M. Regularity and Green's Relations on Semigroups of Transformation Preserving Order and Compression [J]. Bull Korean Math Soc，2012，49(5)：1015－1025.

[3] DENG L Z，ZENG J W，XU B. Green's Relations and Regularity for Semigroups of Transformations that Preserve Double Direction Equivalence [J]. Semigroup Forum，2010，80(3)：416－425.

[4] DENG L Z，ZENG J W，YOU T J. Green's Relations and Regularity for Semigroups of Transformations that Preserve Reverse Direction Equivalence [J]. Semigroup Forum，2011，83(1)：489－498.

[5] DENG L Z，ZENG J W，YOU T J. Green's Relations and Regularity for Semigroups of Transformations that Preserve Order and a Double Direction Equivalence [J]. Semigroup Forum，2012，84(1)：59－68.

[6] PEI H S，SUN L，ZHAI H C. Green's Relations for the Variants of Transformation Semigroups Preserving an Equivalence Relation [J]. Communications in Algebra，2007，35：1971－1986.

[7] SUN L，PEI H S，CHENG Z X. Regularity and Green's Relations for Semigroups of Transformations Preserving Orientation and an Equivalence [J]. Semigroup Forum，2007，74：473－486.

[8] 赵 颐，游泰杰. 半群 $CPO_n(A)$的格林关系 [J]. 扬州大学学报(自然科学版)，2015，18(4)：5－8.

[9] 蓝 翔，李际单，刘国新. 关于幂等元格林关系劣化的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2013，38(2)：10－11.

[10] 孙 垒. 保持等价关系的变换半群的组合结果 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(8)：82－88.

[11] HOWIE J M. Fundamentals of Semigroup Theory [M]. Oxford：Oxford University Press，1995.

[12] GANYUSHKIN O，MAZORCHUK V. Classical Finite Transformation Semigroups [M]. London：Springer-Verlag，2009.

Green's Relations and Regularity of Linear Transformation Semigroup $\mathscr{T}_{X\times X}$

LI Xiao-min， LUO Yong-gui， ZHAO Ping

School of Mathematics Science，Guizhou Normal University，Guiyang 550025，China

Abstract：Let $\mathscr{T}_{X\times X}$ be the linear transformation semigroup on the set $X\times X$. Let X be natural number set $\mathbb{N}$ or integer set $\mathbb{Z}$. By analyzing the divisibility relation，the Green's relations and regular elements of the semigroup $\mathscr{T}_{X\times X}$ are obtained respectively.

Key words：linear transformation semigroup；divisibility；Green's relations；regular element；idempotent element

责任编辑 廖 坤 崔玉洁