第 44 卷 第 2 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2019 年 2 月
Vol. 44 No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb. 2019

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2019.02.007

度量空间中强链回归点集的研究[①]

冀占江[1,2]

1. 梧州学院 信息与电子工程学院,广西 梧州 543002;
2. 梧州学院 广西高校图像处理与智能信息系统重点实验室,广西 梧州 543002

摘要: 研究了紧致度量空间中连续自映射强链回归点集的动力学性质,利用映射的一致收敛性,得到了强链回归点的一些结论:同胚映射 f 的强链回点集等于它的逆映射 f^{-1} 的强链回归点集;同胚映射 f 的强链回归点集对 f 强不变;连续映射 f 限制在它的强链回归点集上形成的强链回归点集就是连续映射 f 在度量空间上形成的强链回归点集. 最后给出一个例子,表明了强链回归点的概念不同于链回归点的概念. 这些结论推广和改进了早期文献中链回归点的相关结果.

关　键　词: 紧致度量空间;连续映射;链回归点;强链回归点

中图分类号: O189.11　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2019)02-0029-07

跟踪性和强跟踪性是动力系统理论研究中十分重要的概念,与系统的稳定性和混沌[1-2]有着密切的联系,有着广泛的应用前景. 与跟踪性[3-7]有关的研究成果已经很多,但是与强跟踪性[8-11]有关的研究成果却很少,目前属于初步的研究阶段,很多问题需要研究. 我们知道链回归点集在跟踪性的研究中发挥着重要作用,强链回归点集在强跟踪性的研究中发挥着重要作用,为了能更好地研究强跟踪性,我们必须研究清楚强链回归点集的动力学性质. 文献[8]证明了强链回归点集对连续映射不变. 本文通过证明得到更强的结论:强链回归点集对同胚映射强不变,完善了文献[8]的研究结果. 本文还对文献[12-13]中关于链回归点集的部分结果进行了推广,得到:连续映射 f 限制在它的强链回归点集上形成的强链回归点集就是连续映射 f 在紧致度量空间 X 上形成的强链回归点集;映射 f 的强链回归点集与 f^{-1} 的强链回归点集相等. 本文最后还给出了链回归点集不等于强链回归点集的例子,这说明本文的研究结果是不同于文献[12-13]的,并推广和改进了文献[12-13]中的结果,有一定学术研究价值.

定义 1[8]　设 (X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$\delta > 0$,$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 X 中的有限序列,如果对 $\forall\, 0 \leqslant i < n$,都有 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$,则称 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 f 作用下从 x_0 到 x_n 的 δ-链.

定义 2[8]　设 (X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$x \in X$. 如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$,都存在 f 作用下从 x 到 x 的 ε-链,则称 x 是 f 的链回归点. f 所有链回归点组成的集合称为 f 的链回归点集,记为 $\mathrm{CR}(f)$.

定义 3[8]　设 (X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$\delta > 0$,$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 X 中的有限序列. 如果 $\sum\limits_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$,则称 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 是 f 作用下从 x_0 到 x_n 的强 δ-链.

定义 4[8]　设 (X, d) 是度量空间,$f: X \longrightarrow X$ 连续,$x \in X$. 如果对 $\forall\, \varepsilon > 0$,都存在 f 作用下从 x 到 x 的强 ε-链,则称 x 是 f 的强链回归点. f 所有的强链回归点组成的集合称为 f 的强链回归点集,记为 $\mathrm{SCR}(f)$.

---

① 收稿日期:2018-04-17
基金项目:广西省硕士学位授予单位立项建设项目(桂学位[2013]4 号);梧州学院科学研究项目(2017C001).
作者简介:冀占江(1985-),男,讲师,主要从事拓扑动力系统的研究.

定义 5[14] 设(X,d)是度量空间，f：$X \longrightarrow X$ 连续. 如果存在 $L>0$，对 $\forall x, y \in X$，有 $d(f(x), f(y)) \leqslant L d(x, y)$，则称 f 是利普希茨映射，L 为 f 的利普希茨常数.

定理 1 设(X,d)是紧致度量空间，f：$X \longrightarrow X$ 同胚，则 $\mathrm{SCR}(f)=\mathrm{SCR}(f^{-1})$.

证 先证 $\mathrm{SCR}(f) \subset \mathrm{SCR}(f^{-1})$. 设 $x \in \mathrm{SCR}(f)$. 由 f^{-1} 的一致连续性知，对 $\forall \varepsilon>0$，存在 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{3}$，当 $d(z_1, z_2)<\delta$ 时，有

$$d(f^{-1}(z_1), f^{-1}(z_2))<\frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

由 $x \in \mathrm{SCR}(f)$ 知，存在 f 作用下的强 δ-链$\{x_i\}_{i=0}^{n}$，其中 $x_0=x_n=x$. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), x_{i+1})<\delta$$

则有

$$\sum_{i=0}^{n-1} d(f^{-1}(f(x_{i+1})), f(x_i))=\sum_{i=0}^{n-1} d(f(x_i), x_{i+1})<\delta$$

特别地，有：

$$d(x, f(x_{n-1}))<\delta \qquad d(x_{n-1}, f(x_{n-2}))<\delta$$

由(1)式知

$$d(f^{-1}(x), x_{n-1})<\frac{\varepsilon}{3}$$

故

$$d(f^{-1}(x), f(x_{n-2})) \leqslant d(f^{-1}(x), x_{n-1})+d(x_{n-1}, f(x_{n-2}))<\frac{2}{3} \varepsilon$$

则有

$$d(f^{-1}(x), f(x_{n-2}))+\sum_{i=0}^{n-3} d(f^{-1}(f(x_{i+1})), f(x_i))+d(f^{-1}(f(x_0)), x)<\frac{2}{3} \varepsilon+\delta<\varepsilon$$

故$\{x, f(x_{n-2}), f(x_{n-3}), \cdots, f(x_2), f(x_1), f(x_0), x\}$ 是 f^{-1} 作用下的强 ε-链. 故 $x \in \mathrm{SCR}(f^{-1})$，则 $\mathrm{SCR}(f) \subset \mathrm{SCR}(f^{-1})$.

下证 $\mathrm{SCR}(f^{-1}) \subset \mathrm{SCR}(f)$. 设 $y \in \mathrm{SCR}(f^{-1})$. 由 f 的一致连续性知，对 $\forall \eta>0$，存在 $0<\eta_0<\frac{\eta}{3}$，当 $d(z_3, z_4)<\eta_0$ 时，有

$$d(f(z_3), f(z_4))<\frac{\eta}{3} \tag{2}$$

由 $y \in \mathrm{SCR}(f^{-1})$ 知，存在 f^{-1} 作用下的强 η-链$\{y_i\}_{i=0}^{m}$，其中 $y_0=y_m=y$. 故

$$\sum_{i=0}^{m-1} d(f^{-1}(y_i), y_{i+1})<\eta_0$$

因此

$$\sum_{i=0}^{m-1} d(f(f^{-1}(y_{i+1})), f^{-1}(y_i))=\sum_{i=0}^{m-1} d(f^{-1}(y_i), y_{i+1})<\eta_0$$

特别地，有：

$$d(y, f^{-1}(y_{m-1}))<\eta_0 \qquad d(y_{m-1}, f^{-1}(y_{m-2}))<\eta_0$$

由(2)式知

$$d(f(y), y_{m-1})<\frac{\eta}{3}$$

故

$$d(f(y), f^{-1}(y_{m-2})) \leqslant d(f(y), y_{m-1})+d(y_{m-1}, f^{-1}(y_{m-2}))<\frac{2}{3} \eta$$

则有

$$d(f(y),f^{-1}(y_{m-2}))+\sum_{i=0}^{m-3}d(f(f^{-1}(y_{i+1})),f^{-1}(y_i))+d(f(f^{-1}(y_0)),y)<\frac{2}{3}\eta+\eta_0<\eta$$

故$\{y,f^{-1}(y_{m-2}),f^{-1}(y_{m-3}),\cdots,f^{-1}(y_2),f^{-1}(y_1),f^{-1}(y),y\}$是 f 作用下的强 η-链．故 $y\in\mathrm{SCR}(f)$，则 $\mathrm{SCR}(f^{-1})\subset\mathrm{SCR}(f)$.

定理 2　设(X,d)是紧致度量空间，$f:X\longrightarrow X$ 同胚，则 $f(\mathrm{SCR}(f))=\mathrm{SCR}(f)$.

证　由文献[8]的定理 3 知，$f(\mathrm{SCR}(f))\subset\mathrm{SCR}(f)$．下证 $\mathrm{SCR}(f)\subset f(\mathrm{SCR}(f))$．设 $x\in\mathrm{SCR}(f)$，由 f^{-1} 的一致连续性知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{4}$，当 $d(y_1,y_2)<\delta$ 时，有

$$d(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2))<\frac{\varepsilon}{4}\tag{3}$$

由 $x\in\mathrm{SCR}(f)$ 知，存在强 δ-链$\{x_i\}_{i=0}^{n}$，其中 $x_0=x_n=x$．故

$$\sum_{i=0}^{n-1}d(f(x_i),x_{i+1})<\delta$$

特别地，$d(f(x_{n-1}),x)<\delta$.

由(3)式知

$$d(f^{-1}(x),x_{n-1})<\frac{\varepsilon}{4}$$

又因 $d(f(x_{n-2}),x_{n-1})<\delta$，故

$$d(f(x_{n-2}),f^{-1}(x))\leqslant d(f(x_{n-2}),x_{n-1})+d(x_{n-1},f^{-1}(x))<\frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$d(f(f^{-1}(x)),x)+\sum_{i=0}^{n-3}d(f(x_i),x_{i+1})+d(f(x_{n-2}),f^{-1}(x))<0+\delta+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

故$\{f^{-1}(x),x,x_1,\cdots,x_{n-2},f^{-1}(x)\}$是 f 作用下的强 ε-链．则 $f^{-1}(x)\in\mathrm{SCR}(f)$，即 $x\in f(\mathrm{SCR}(f))$，则 $\mathrm{SCR}(f)\subset f(\mathrm{SCR}(f))$，故 $f(\mathrm{SCR}(f))=\mathrm{SCR}(f)$.

由强链回归点集 $\mathrm{SCR}(f)$ 对连续映射 f 不变，可以研究 f 限制在 $\mathrm{SCR}(f)$ 的情况，得到如下结论：

定理 3　设(X,d)是紧致度量空间，$f:X\longrightarrow X$ 连续．若 f 是利普希茨映射，其中利普希茨常数为 L，则 $\mathrm{SCR}(f)=\mathrm{SCR}(f\mid\mathrm{SCR}(f))$.

证　显然 $\mathrm{SCR}(f\mid\mathrm{SCR}(f))\subset\mathrm{SCR}(f)$．下证 $\mathrm{SCR}(f)\subset\mathrm{SCR}(f\mid\mathrm{SCR}(f))$．设 $x\in\mathrm{SCR}(f)$.

步骤 1　首先证明：对 $\forall\varepsilon>0$，和任意包含 $\mathrm{SCR}(f)$ 的开集 U，存在 f 作用下的强 ε-链$\{x_i\}_{i=0}^{n}$，其中 $x_0=x_n=x$，并且链中的每一个元素都在 U 中.

反正法，若不然，存在 $\varepsilon_0>0$，和包含 $\mathrm{SCR}(f)$ 的开集 U_0，对任意在 f 作用下的从 x 到 x 的强 ε_0-链，至少有一个元素不在 U_0 中．取正数序列$\{\varepsilon_k\}_{k\geqslant1}$，且满足 $\varepsilon_k<\varepsilon_0(k\geqslant1)$，$\varepsilon_k\to0$．因此对在 f 作用下的从 x 到 x 的强 ε_k-链，必有一个元素不在 U_0 中，不妨记为 y_k．由 X 的紧致性知，不妨设 $y_k\to y$．由于 $X-U_0$ 是闭集，故 $y\in X-U_0$．由 f 的一致连续性知，对 $\forall\eta>0$，存在 $0<\delta_1<\frac{\eta}{6}$，当 $d(z_1,z_2)<\delta_1$ 时，有

$$d(f(z_1),f(z_2))<\frac{\eta}{6}\tag{4}$$

固定 $m>0$，且满足 $\varepsilon_m<\delta_1$ 和 $d(y_m,y)<\delta_1$．设$\{t_0,t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_{l-1},t_l\}$是上面的提到的强 ε_m-链，其中 $t_0=t_l=x$，$t_m=y_m\notin U_0$．故

$$\sum_{i=0}^{l-1}d(f(t_i),t_{(i+1)})<\varepsilon_m$$

特别地，有：

$$d(f(t_{m-1}),t_m)<\varepsilon_m\qquad d(f(t_m),t_{m+1})<\varepsilon_m$$

故

$$d(f(t_{m-1}),y)\leqslant d(f(t_{m-1}),t_m)+d(t_m,y)<\frac{\eta}{3}$$

结合 $d(y_m,y)<\delta_1$，由(4)式知

$$d(f(y_m),f(y))<\frac{\eta}{6}$$

故

$$d(f(y),t_{m+1})<d(f(y),f(y_m))+d(f(y_m),t_{m+1})<\frac{\eta}{3}$$

则

$$d(f(y),t_{m+1})+\sum_{i=m+1}^{l-1}d(f(t_i),t_{i+1})+\sum_{i=0}^{m-2}d(f(t_i),t_{i+1})+d(f(t_{m-1}),y)<\frac{\eta}{3}+\varepsilon_m+\frac{\eta}{3}<\eta$$

因此$\{y,t_{m+1},\cdots,t_{l-1},t_l,t_1,\cdots,t_{m-1},y\}$是 f 作用下的强 η-链，故 $y\in \mathrm{SCR}(f)$，与 $y\in X-U_0$ 矛盾. 故步骤1证毕.

对 $\forall\varepsilon>0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$U_n=\left\{y\in X: d(y,\mathrm{SCR}(f))<\dfrac{\varepsilon}{2n(L+1)}\right\}$，则 U_n 是包含 $\mathrm{SCR}(f)$ 的开集，由步骤1知，存在 f 作用下的有限强$\dfrac{\varepsilon}{2}$-链$\{x_0^n,x_1^n,x_2^n,\cdots,x_{k_n}^n\}$，并且链中的每个元素都在 U_n 中，$x_0^n=x_{k_n}^n=x$. 假设对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，都有 $k_n>n$，则 $k_n\to+\infty$，这与$\{x_0^n,x_1^n,x_2^n,\cdots,x_{k_n}^n\}$是有限链矛盾，故存在 $n_0\in\mathbb{N}_+$，使得 $k_{n_0}\leqslant n_0$. 易知$\{x_0^{n_0},x_1^{n_0},x_2^{n_0},\cdots,x_{k_{n_0}}^{n_0}\}$是 f 作用下的强$\dfrac{\varepsilon}{2}$-链，且链中的每个元素都在 U_{n_0} 中，$x_0^{n_0}=x_{k_{n_0}}^{n_0}=x$. 故

$$\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}d(f(x_i^{n_0}),x_{i+1}^{n_0})<\frac{\varepsilon}{2}$$

由 U_{n_0} 的取法知，对 $\forall 1\leqslant i<k_{n_0}$，存在 $y_i\in\mathrm{SCR}(f)$，满足

$$d(x_i^{n_0},y_i)<\frac{\varepsilon}{2n_0(L+1)}$$

取 $y_0=y_{k_{n_0}}=x$.

步骤2 证明$\{y_i\}_{i=0}^{k_{n_0}}$是在 f 作用下的强 ε-链. 当 $0\leqslant i<k_{n_0}$ 时，由 f 的利普希茨常数为 L 知

$$d(f(x_i^{n_0}),f(y_i))\leqslant Ld(x_i^{n_0},y_i)$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}d(f(y_i),y_{i+1})\leqslant&\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}[d(f(y_i),f(x_i^{n_0}))+d(f(x_i^{n_0}),x_{i+1}^{n_0})+d(x_{i+1}^{n_0},y_{i+1})]\leqslant\\&\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}[Ld(y_i,x_i^{n_0})+d(f(x_i^{n_0}),x_{i+1}^{n_0})+d(x_{i+1}^{n_0},y_{i+1})]=\\&\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}d(f(x_i^{n_0}),x_{i+1}^{n_0})+\sum_{i=0}^{k_{n_0}-1}(L+1)d(x_i^{n_0},y_i)<\\&\frac{\varepsilon}{2}+(L+1)\frac{k_{n_0}\varepsilon}{2n_0(L+1)}\leqslant\\&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $x\in\mathrm{SCR}(f\mid\mathrm{SCR}(f))$.

引理1 令 $\delta=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\right)$，$x_0=\dfrac{1}{2}$. 若$\{x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{m-1},x_m\}$是 f 作用下的强 δ-链，则

对 $\forall 1\leqslant k\leqslant m$，都有$\frac{1}{2}<x_k<1+\delta$.

证　当 $k=1$ 时，由于$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{m-1}, x_m\}$是 f 作用下的强 δ-链，故有

$$\sum_{j=0}^{m-1} d(f(x_j), x_{j+1})<\delta$$

因此有

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-x_1\right|<\delta$$

则有：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-x_1<\delta \qquad x_1-f\left(\frac{1}{2}\right)<\delta$$

由 $f\left(\frac{1}{2}\right)-x_1<\delta$ 知

$$x_1>f\left(\frac{1}{2}\right)-\delta=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$$

由 $x_1-f\left(\frac{1}{2}\right)<\delta$ 知

$$x_1<f\left(\frac{1}{2}\right)+\delta<1+\delta$$

假设当 $i<k$ 时(其中 $2\leqslant k\leqslant m$)，有$\frac{1}{2}<x_i<1+\delta$成立，下面证明 $i=k$ 时也成立．先证 $x_k<1+\delta$，假设 $x_k\geqslant 1+\delta$，由于$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{m-1}, x_m\}$是 f 作用下的强 δ-链，故有

$$\sum_{j=0}^{m-1} d(f(x_j), x_{j+1})<\delta$$

因此有

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})<\delta$$

下面说明 $x_{k-1}>1$．若 $x_{k-1}\leqslant 1$，则有

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})\geqslant|f(x_{k-1})-x_k|\geqslant x_k-1\geqslant\delta$$

这与$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})<\delta$矛盾，故 $x_{k-1}>1$．令 $l=\max\{i: 1\leqslant i\leqslant k, x_{i-1}<1\}$，故有 $l<k$，且当 $l\leqslant i<k$ 时，$x_i\geqslant 1$．则有

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})\geqslant\sum_{j=l-1}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})=d(f(x_{l-1}), x_l)+\sum_{j=l}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})$$

又因当 $l\leqslant i<k$ 时，有 $1\leqslant x_i<1+\delta<\frac{3}{2}$，因此有

$$\sum_{j=l}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})=\sum_{j=l}^{k-1} d(x_j, x_{j+1})=\sum_{j=l}^{k-1}|x_j-x_{j+1}|\geqslant\left|\sum_{j=l}^{k-1}(x_{j+1}-x_j)\right|=|x_k-x_l|$$

故有

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})\geqslant d(f(x_{l-1}), x_l)+|x_k-x_l|$$

又因 $d(f(x_{l-1}), x_l)\geqslant x_l-1$，$x_k\geqslant 1+\delta$，$x_l<1+\delta$，因此

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(f(x_j), x_{j+1})\geqslant x_k-x_l+x_l-1=x_k-1\geqslant\delta$$

故

$$\sum_{j=0}^{m-1} d(f(x_j), x_{j+1}) \geqslant \delta$$

这与$\sum_{j=0}^{m-1} d(f(x_j), x_{j+1}) < \delta$矛盾，因此$x_k < 1+\delta$. 因$|f(x_{k-1}) - x_k| < \delta$，则有$x_k > f(x_{k-1}) - \delta$. 又因$f(x)$在$[0, 3]$上递增，且$\frac{1}{2} < x_{k-1} < 1+\delta < \frac{3}{2}$，故$f(x_{k-1}) > f\left(\frac{1}{2}\right)$，则有

$$x_k > f\left(\frac{1}{2}\right) - \delta > \frac{1}{2}$$

由数学归纳法可知，引理1成立.

我们知道，强链回归点一定是链回归点，反之却不一定成立，本文给出一个例子说明这一点.

例1　设$I=[0, 6]$，定义$f: I \longrightarrow I$，其中$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \in [0, 1) \\ x & x \in [1, 3) \\ 3x-6 & x \in [3, 4) \\ -3x+18 & x \in [4, 6] \end{cases}$，则$\frac{1}{2} \in \mathrm{CR}(f)$，但$\frac{1}{2} \notin \mathrm{SCR}(f)$.

证　首先证$\frac{1}{2} \in \mathrm{CR}(f)$. 对$\forall \varepsilon > 0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty} f^n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$，故存在足够大的正整数$m_1 > 0$，满足$d\left(f^{m_1}\left(\frac{1}{2}\right), 1\right) < \varepsilon$. 因此$\left\{\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right), f^2\left(\frac{1}{2}\right), \cdots, f^{m_1-1}\left(\frac{1}{2}\right), 1\right\}$是$f$作用下从$\frac{1}{2}$到1的$\varepsilon$-链.

令$m_2 = 2\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则

$$\left\{1+0\cdot\frac{\varepsilon}{3}, 1+1\cdot\frac{\varepsilon}{3}, 1+2\cdot\frac{\varepsilon}{3}, 1+3\cdot\frac{\varepsilon}{3}, \cdots, 1+(3m_2-1)\cdot\frac{\varepsilon}{3}, 1+3m_2\cdot\frac{\varepsilon}{3}, 3\right\}$$

是f作用下从1到3的ε-链.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{3^n}\right) = 3$知，存在足够大的正整数$m_3 > 0$，满足$d\left(3+\frac{1}{3^{m_3}}, 3\right) < \varepsilon$. 因此

$$\left\{3, 3+\frac{1}{3^{m_2}}, 3+\frac{1}{3^{m_2-1}}, 3+\frac{1}{3^{m_2-2}}, \cdots, 3+\frac{1}{3^2}, 3+\frac{1}{3^1}, 4, 6, 0\right\}$$

是f作用下从3到0的ε-链.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n} = 0$知，存在足够大的正整数$m_4 > 0$，满足$d\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3^{m_4}}, 0\right) < \varepsilon$. 因此

$$\left\{0, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^{m_4}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^{m_4-1}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^{m_4-2}}, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3^0}\right\}$$

是f作用下从0到$\frac{1}{2}$的ε-链. 综上可知，存在f作用下从$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{2}$的ε-链，故$\frac{1}{2} \in \mathrm{CR}(f)$.

下证$\frac{1}{2} \notin \mathrm{SCR}(f)$. 假设$\frac{1}{2} \in \mathrm{SCR}(f)$，则存在$f$作用下的强$\delta$-链$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{t-1}, x_t\}$，其中$x_0 = x_t = \frac{1}{2}$. 由引理1知，$\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$，矛盾. 故$\frac{1}{2} \notin \mathrm{SCR}(f)$.

注1　通过例1可以看出，存在$\mathrm{SCR}(f) \neq \mathrm{CR}(f)$的情况. 也就是说，强链回归点集与链回归点集是不同的. 但是笔者通过证明却得到文献[12-13]中关于链回归点集的部分结论对于强链回归点集也是成立的，所以本文的结果推广和改进了相关文献已有的结果，有一定的研究价值.

参考文献：

[1]　罗　飞，金渝光，白丹莹. 强一致收敛条件下的集值Devaney混沌[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(2)：79-83.

[2] 但建军，金渝光，高 瑾. 关于超空间复合系统混沌性的研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(10)：26－31.
[3] 李明军，曾凡平. 序列伪轨跟踪性与拓扑可迁 [J]. 广西大学学报(自然科学版)，2000，25(2)：137－140.
[4] 李思敏. 逆极限空间的伪轨跟踪性 [J]. 数学年刊，2001，22(4)：479－482.
[5] 吴志明，陈尔明. 逆极限空间的逐点伪轨跟踪性 [J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2009，30(5)：593－595.
[6] GU R B，SHENG Y Q. Apotp for the Inverse Limit Spaces [J]. Applied Mathematics Journal，2006，21(4)：473－478.
[7] CHEN L，LI S H. Shadowing Property for Inverse Limit Spaces [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1992，115(2)：573－580.
[8] 赵俊玲. 强链回归集与强跟踪性 [J]. 数学研究，2004，37(3)：286－291.
[9] 晏炳刚，吴泽刚. 关于强跟踪性的注记 [J]. 成都大学学报(自然科学版)，2007，26(4)：292－294.
[10] 韩英豪，刑春娜，金元峰. 提升系统的强跟踪性 [J]. 延边大学学报(自然科学版)，2006，32(2)：93－96.
[11] 冀占江. 乘积空间与拓扑群作用下逆极限空间的动力学性质 [D]. 南宁：广西大学，2014.
[12] BLOCK L S，COPPEL W A. Dynamics in One Dimension [M]. Berlin：Springer-Verlag，1992.
[13] 廖公夫，王立冬，范钦杰. 映射迭代与混沌动力系统 [M]. 北京：科学出版社，2013.
[14] SAKAI K. Various Shadowing Properties for Positively Expansive Maps [J]. Topology and Its Applications，2003，131：15－31.

On Strong Chain Recurrent Point Set in Metric Space

JI Zhan-jiang[1,2]

1. School of Information and Electronic Engineering, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China;
2. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Image Processing and Intelligent Information System, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China

Abstract: The dynamical properties of strong chain recurrent point set of continuous self mapping has been studied in the compact metric spaces. By the uniform convergence of the map, some conclusions of strong chain recurrent points have been obtained: The strong chain recurrent point set of the homeomorphic mapping is equal to strong chain recurrent point set of its inverse mapping; The strong chain recurrent point set of the homeomorphism map is its strong invariant set; The strong chain recurrent point set of the restriction of the continuous map f to $SCR(f)$ is equal to the strong chain recurrent point set of the map f in the compact metric space. Finally, an example is given to show that the concept of strong chain recurrent point is different from the concept of chain recurrent point. Hence, these conclusions generalize and improve the related results of chain recurrent point in the early literature.

Key words: compact metric space; continuous map; chain recurrent point; strong chain recurrent point

责任编辑　廖　坤